19

نیما رمضان اکبری

(1)

$f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^3(2x) + ax^2 + b}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1 - 3\frac{(2x)^2}{2} + ax^2 + b}{x} = \frac{1 - 6x^2 + ax^2 + b}{x}$

$\Rightarrow b + 1 = 0$

2

$\Rightarrow b = -1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{(a-6)x^2}{x} = (a-6)x = 0$

$\rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2(a-6)x \\ f''(x) = 2(a-6) \end{cases} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{x} \overset{H.P}{=} \frac{f''(x)}{1} = \frac{2(a-6)}{1} = 2$

$\Rightarrow a - 6 = 1$

$\Rightarrow a = 7$

$\boxed{a + b = 7 - 1 = 6}$

✓

(2)

$A = (-0.5, -12),\ B = (2.5, 6) \Rightarrow m_{AB} = 6,\ y = 6x - 9$

2

$f'(x) = \frac{-2a}{(2x-1)^2} = 6,\quad f(x) = \frac{a}{2x-1} = 6x - 9$

$\begin{cases} a = -3(2x-1)^2 \\ a = (2x-1)(6x-9) \end{cases} \Rightarrow -3(2x-1) = 6x - 9 \Rightarrow +6x - 9 = -6x + 3$

$\Rightarrow 12x = 12$

$\Rightarrow x = 1$

$a = -3 \Rightarrow f(5) = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$

✓

(3)

$f'(1) = 2$

$f'(x) = \frac{1 - a^2}{(ax+1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{\overbrace{1 - a^2}^{(a+1)(a-1)}}{(a+1)^2} = \frac{1 - a}{a + 1} = 2$

2

$\Rightarrow 2a + 2 = 1 - a \Rightarrow 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

$a - b = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

$f(1) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{-\frac{1}{3} + 1} = 1 \xrightarrow[y = 2x + b]{} 2(1) + b = 1 \Rightarrow b = -1$

✓

۵

$f(x) = g(x) \Rightarrow \sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{2}\sin x \Rightarrow \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin x$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ در بازه $[0, \pi]$

$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$ نقطه تقاطع

۲

شیب $f(x)$ را $\Rightarrow f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

شیب خط مماس

$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}) \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور } x} -\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}x \xrightarrow{\times\frac{16}{\sqrt{2}}} -12 + \pi = 4x$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - 3$

۴

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow \underline{6(x+1)(x-2)} \Rightarrow \begin{cases} A(-1, 8) \\ B(2, -19) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{-19 - 8}{2 - (-1)} = -9$

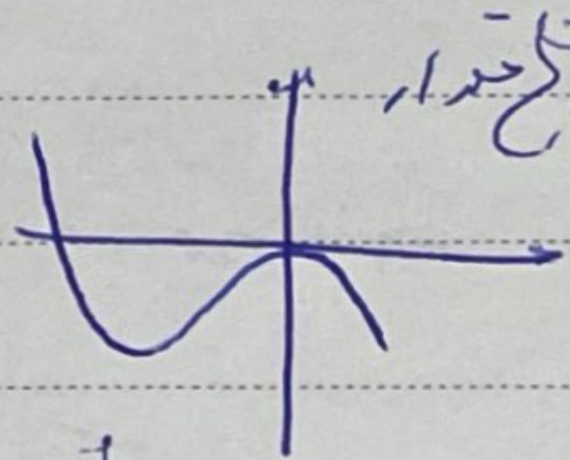
۲

$f'(x) = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ ۲ جواب

توقف

۷



تقعر

$\boxed{\text{تقعر}}$

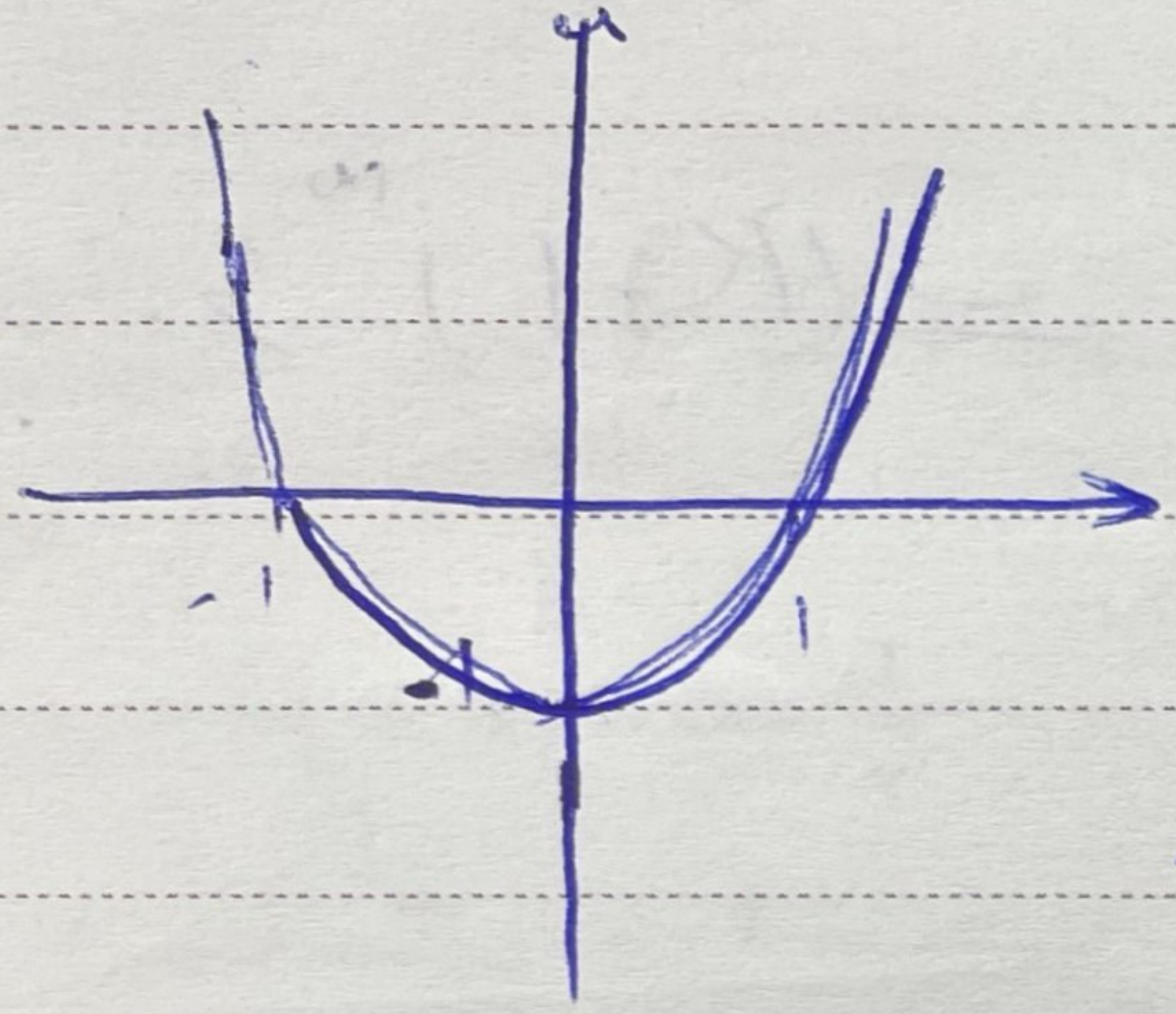
نمودار $\Rightarrow x < 0,\ y > 0$

$x_{\text{عطف}} = -\frac{(k+1)}{3k} < 0 \Rightarrow R - [-1, 0]$ $\quad k < 0 \Rightarrow \emptyset$

$y_{\text{عطف}} = \frac{-(k+1)^3}{27k^2} + \frac{(k+1)^3}{9k^2} > 0 \Rightarrow (k+1)^3 > 0 \Rightarrow k > -1$

۲

(ج)



$-\alpha, \alpha$ نقطه $\Rightarrow f'(-\alpha) \times f'(\alpha) = -1$

$f'(x) = 2x$

$\Rightarrow (-2\alpha)(+2\alpha) = -1$

$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{4}$

۲

$f(\alpha) = f(-\alpha)$

$\Rightarrow \alpha^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4} + -\frac{3}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ ✓

Year: Month: Date: ( ) Subject:

۸

۱

$y = x^۳ + ax^۲ + bx - ۱ \Rightarrow -۴ = -\cancel{۱} + a - b - \cancel{۱}$

$\boxed{-۲ = a - b}$

$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow -۴ = ۳ - ۲a + b \Rightarrow \boxed{-۲a + b = -۷}$

$f(-۱) = -۴ \quad , \quad f'(-۱) = -۴$

$\begin{cases} -۲a + b = -۷ \\ a - b = -۲ \end{cases}$

$-a = -۹ \Rightarrow a = ۹ \quad , \quad b = ۱۱ \quad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۹}{۱۱}$

عطف $x = \frac{-b}{۳a} \rightarrow x = \frac{-a}{۳} \rightarrow \frac{-a}{۳} = -۱ \rightarrow \boxed{a = ۳}$

$-۴ = -۱ + ۳ - b - ۱ \rightarrow \boxed{b = ۵}$

$\frac{a}{b} = \frac{۳}{۵}$

۹

$f'(۰) = ۰$

$f(۰) = ۴$

$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c \xrightarrow{f(۰)=۴} c = ۴$

$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \xrightarrow{f'(۰)=۰} b = ۰$

۲

$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax = ۰ \rightarrow x(۳x + ۲a) = ۰ \quad x = \frac{-۲a}{۳}$

$f\left(-\frac{۲a}{۳}\right) = ۰ \rightarrow \left(\frac{-۲a}{۳}\right)^۳ + a\left(-\frac{۲a}{۳}\right)^۲ + ۴ = ۰$

$\frac{۴}{۲۷}a^۳ = -۴ \rightarrow a^۳ = -۲۷ \Rightarrow a = -۳ \Rightarrow x_{min} = \frac{-۲a}{۳} = ۲$

۱۰

$f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۵$

$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x$

$f''(x) = ۱۲x^۲ - ۱۲$

y	-۴		۰		۵		۰		-۴	
x	$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$+\sqrt{۳}$	
f(x)	↘		↗		↗		↘		↘	↗
f'(x)	$-$	۰	$+$		۰	$-$		۰	$+$	
f''(x)	$+$		۰	$-$		۰	$+$			

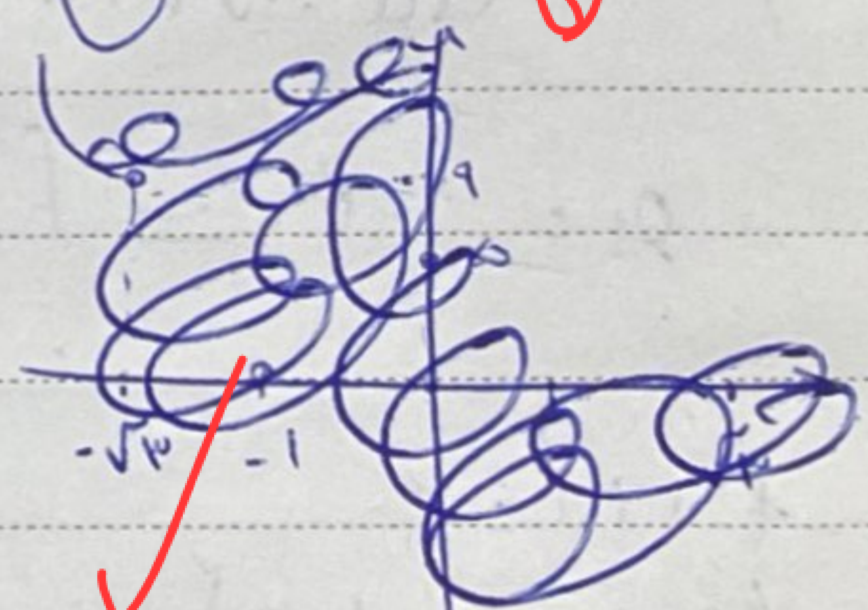
زاویه بین ۰

$x(۴x^۲ - ۱۲) = ۰$

$x = ۰ \quad , \quad ۴x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ = ۱۲ \Rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$

$۱۲x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۱۲x^۲ = ۱۲ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$

۲



$C = ۱ \quad D = -۱$

$B = -\sqrt{۳} \quad A = +\sqrt{۳}$