« مسابقات الحسنی » « دوازدهم رشته A. عجم »

۱ـ

$f(x) = \cos^{۳}(۲x) + ax^{۲} + b \qquad a+b=?$

$f'(x) = ۳\cos^{۲}(۲x)(۲)(-\sin(۲x)) + ۲ax = -۶\cos^{۲}(۲x)(\sin(۲x)) + ۲ax$

$\lim_{x\to ۰^{+}} \frac{f(x)}{x} = \textcircled{۰} \qquad \lim_{x\to ۰^{-}} \frac{f'(x)}{x} = \textcircled{۲}$

$f(۰)=۰ \Rightarrow \overset{۱}{\cancel{\cos^{۳}(۰)}} + \overset{۰}{\cancel{a(۰)}} + b = ۰ \Rightarrow \boxed{b=-۱}$

$\lim_{x\to ۰^{-}} \frac{-۶\cos^{۲}(۲x)\sin(۲x) + ۲ax}{x} = ۲ \qquad \Rightarrow a+b$ صفر

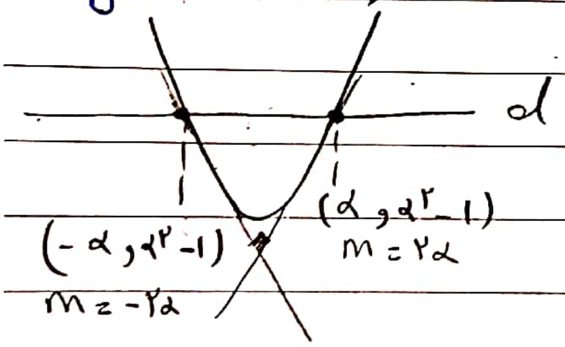
(هم‌ارزی) $* \cos x = ۱ - \frac{x^{۲}}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = ۱ - \frac{۴x^{۲}}{۲} = ۱ - ۲x^{۲}$

$\lim_{x\to ۰^{-}} \frac{-۶(۱-۲x^{۲})^{۲}(۲x) + ۲ax}{x} = ۲$

$\lim_{x\to ۰^{-}} \frac{۲\cancel{x}\left(-۶(۱-۲x^{۲})^{۲} + a\right)}{\cancel{x}} = ۲ \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow \boxed{a=۱}$

۲ـ

$y = x^{۲} - ۱ \to f'(x) = ۲x$



$(۲\alpha)(-۲\alpha) = -۱$

$۴\alpha^{۲} = ۱ \to \alpha^{۲} = \frac{۱}{۴} \to \alpha = \pm\frac{۱}{۲}$

$\alpha^{۲} - ۱ = \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۳}{۴}$

$\boxed{\text{مجموع عرض‌ها}: -\frac{۶}{۴}}$

۳ـ

$f(x) = \frac{a}{۲x-۱} \to f'(x) = \frac{-۲a}{(۲x-۱)^{۲}} \qquad f(۵)=?$

$\left.\begin{matrix}(-۰/۵ , -۱۲)\\ (۲/۵ , ۶)\end{matrix}\right| m = \frac{۱۸}{۳} = ۶ \Rightarrow y = ۶x - ۹$

$f(x) = ۶x - ۹ , \quad f'(x) = ۶$

جواب نهایی $\boxed{f(۵) = \frac{-۳}{۹}}$

$\frac{a}{۲x-۱} = ۶x - ۹ \qquad ۲۴x^{۲} - ۲۴x + ۶ = -۲a$

$\to ۱۲x^{۲} - ۲۴x + ۹ = a \leftarrow \boxed{۴x^{۲} - ۱ = -a} \Rightarrow ۱۶x^{۲} - ۲۴x + ۸ = ۰ \begin{cases} x = \frac{۱}{۲} \to a = ۰ \times \\ x = ۱ \to a = -۳ \checkmark \end{cases}$

Scanned with CamScanner

۴-

$f(x)$ $\quad$ $g(x)$

$y=۲x+b$ $\qquad$ $y=\dfrac{x+a}{ax+۱}$ $\qquad$ $a-b=?$

$f(۱)=g(۱)$ $\qquad$ $f'(۱)=g'(۱)$

$۲+b=\dfrac{۱+a}{a+۱}=۱$ $\qquad$ $۲=\dfrac{۱-a^۲}{(ax+۱)^۲}=\dfrac{۱-a^۲}{(a+۱)^۲}$

$\boxed{b=-۱}$ $\qquad$ $۲(۱+a)^۲=۱-a^۲$

$۲(۱+a^۲+۲a)=۱-a^۲$

$\Rightarrow ۲+۲a^۲+۴a=۱-a^۲ \Rightarrow ۳a^۲+۴a+۱=۰$

$a=-۱$ ✗

$a=\dfrac{-۱}{۳}$ ✓ $\qquad \Rightarrow a-b=\dfrac{-۱}{۳}-(-۱)=\dfrac{۲}{۳}$

۵-

$f(x)=\sin x+\dfrac{۱}{۲}\cos x$ $\qquad$ $g(x)=\dfrac{۳}{۲}\sin x$

$*f(\dfrac{\pi}{۴})=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}+\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}=\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

$\sin x+\dfrac{۱}{۲}\cos x=\dfrac{۳}{۲}\sin x$

$\cancel{\dfrac{۱}{۲}}\cos x=\cancel{\dfrac{۱}{۲}}\sin x \Rightarrow \cos x=\sin x \xrightarrow{x\in[۰,\pi]} x=\dfrac{\pi}{۴}$

$f'(x)=\cos x-\dfrac{۱}{۲}\sin x$ $\qquad$ $(\dfrac{\pi}{۴},\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۴})$

$f'(\dfrac{\pi}{۴})=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}-\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}$ $\qquad$ $y-\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}(x-\dfrac{\pi}{۴})$

$y=\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}x-\dfrac{\sqrt{۲}\pi}{۱۶}+\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

محل برخورد با محور x : $\cancel{\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}}x=\cancel{\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}}\pi-\cancel{\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۴}} \longrightarrow x=\pi-۳$

۶-

$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱$ $\qquad$ f اکسترمم B, A

$f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۰$

$x^۲-x-۲=۰$

$(x-۲)(x+۱)=۰$ $\quad \begin{cases} x=-۱ & f \\ x=۲ & f \end{cases}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & -۱ & & ۲ & \\ \hline f' & + & ۰ & - & ۰ & + \\ f & \nearrow & ⑧ & \searrow & \text{(-۱۹)} & \nearrow \end{array}$$

max نسبی $\qquad$ min نسبی

$A(-۱,۸)$ $\quad m_{AB}=\dfrac{۲۷}{-۳}=-۹ \longrightarrow f'(x)=-۹$

$B(۲,-۱۹)$

$۶x^۲-۶x-۱۲=-۹ \rightarrow ۶x^۲-۶x-۳=۰ \rightarrow ۲x^۲-۲x-۱=۰$

$x=\dfrac{۱\pm\sqrt{۳}}{۲} \longrightarrow$ ۲ نقطه ✓

$y = kx^۳ + (k+۱)x^۲ = x^۲(kx + k + ۱) \quad (k<۰ , k \in \mathbb{Z})$ -۷

$x_I = \frac{-(k+۱)}{۳k} \qquad y_I > ۰$ ↓ $x<۰$ $y>۰$

$kx + k + ۱ = ۰$

$kx = -k - ۱$

$x_I < ۰ \rightarrow \frac{-(k+۱)}{۳k} \leq ۰$

$\frac{k+۱}{۳k} \geq ۰$; $k+۱ \rightarrow -۱$; $۳k \rightarrow ۰$

$x = \frac{-k-۱}{k} \geq ۰$; $-k-۱ \rightarrow -۱$; $k \rightarrow ۰$

	-۱		۰	
$+$		$-$		$+$

	-۱		۰	
$-$		$+$		$-$

$[-۱, \cancel{۰})$

ج $[۰, +\infty) \cup (-\infty, -۱]$

$\Rightarrow k = -۱ \rightarrow$ یک مقدار k

$y = x^۳ + ax^۲ + bx - ۱ \qquad (-۱, -۴) \qquad \frac{a}{b} = ?$ -۸

$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b \qquad f(-۱) = -۴ \rightarrow -۱ + a - b - ۱ = -۴$

$\boxed{a - b = -۲}$

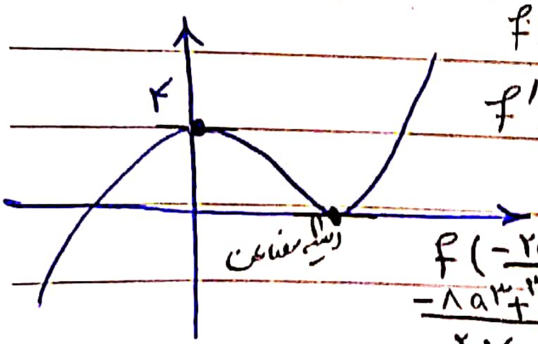
$f'(-۱) = ۰ \Rightarrow ۳ - ۲a + b = ۰$

$-۲a + b = -۳ \Rightarrow \boxed{-۲a + b = -۳}$

$-a = -۵ \Rightarrow a = ۵ , b = ۷$

$\frac{a}{b} = \frac{۵}{۷}$ ✓ ⇐

$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + \cancel{b}^{۰}$ -۹



$f(۰) = ۴ \longrightarrow c = ۴$

$f'(۰) = ۰ \longrightarrow b = ۰$

نسبی Min $= \frac{-۲a}{۳} = \frac{-۲(-۳)}{۳} = ②$ جواب نهایی:

$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax = ۰ \qquad x(۳x + ۲a) = ۰ \quad \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{-۲a}{۳} \end{cases}$

$f\left(\frac{-۲a}{۳}\right) = ۰ \longrightarrow \frac{-۸a^۳}{۲۷} + \frac{۴a^۳}{۹} + ۴ = ۰$

$\frac{-۸a^۳ + ۱۲a^۳}{۲۷} = -۴ \Rightarrow \cancel{۴}a^۳ = -\cancel{۴} \times ۲۷ \Rightarrow \boxed{a = -۳}$

$f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۵ \qquad f(\sqrt{۳}) = ۹ - ۱۸ + ۵ = -۴ \qquad f(-\sqrt{۳}) = -۴$

min نسبی ← A, B -۱۰

عطف ← D, C

$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x = ۰ \qquad A(\sqrt{۳}, -۴) \quad B(-\sqrt{۳}, -۴) \quad \} \; y = -۴ = m$

$۴x(x^۲ - ۳) = ۰$

$x = ۰ \quad x = \sqrt{۳} \quad x = -\sqrt{۳}$

	$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	
$-$		$+$		$-$		$+$
↘	Min	↗	max	↘	Min	↗

$f''(x) = ۱۲x^۲ - ۱۲ = ۰$

$x = \pm ۱$

$f(۱) = ۰ , f(-۱) = ۰ \quad \} \; y = ۰ = m'$

* دو خط باهم موازی اند

پس زاویه بین آنها صفر است