رونیا ایوبی

۱۷

(۱) $\cancel{\ldots}\ ۳\cos^{۲} ۲x \times ۲x - \sin ۲x + ۲ax = f'(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \dfrac{f'(x)}{1} = 0 \Rightarrow f'(0^+) = 0 \Rightarrow ۴\times 0 = 0$

$\hookrightarrow x = 0 \Rightarrow 1 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -1$

(۲)

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f'(x)}{x} = ۲ \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \dfrac{f''(x)}{1} = ۲ \Rightarrow f''(0^-) = ۲$

$\boxed{a + b = ۷ - 1 = ۶}$

$f'(x) = (-۳\cos ۲x)(\sin ۴x) + ۲ax \ \cancel{f'(x) = (-۳)(-۲\cos x \sin x \sin ۴x)}$

$\hookrightarrow f''(x) = (-۳)(-۲ \sin x \sin ۴x + ۴ \cos x \cos ۲x) + ۲a$

$\xrightarrow{x=0} f''(0) = -۳(0 + ۴) + ۲a = ۲ \Rightarrow ۲a - ۱۲ = ۲ \Rightarrow ۲a = ۱۴ \Rightarrow a = ۷$

رونیا الوچی

۹

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \longrightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$c=4 \qquad x=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow b=0$$

$$\Rightarrow f'(x)=x(3x+2a) \qquad \Rightarrow x=-\frac{2a}{3}$$

$$f(x)=\underbrace{\left(\frac{-2a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2}_{=-4}+4=0$$

$$\Rightarrow \frac{-8a^3}{27}+\frac{4a^3}{\cancel{27}\,9}=\frac{4a^3}{27}=-4 \Rightarrow a^3=-27 \Rightarrow a=-3$$

2

$$\frac{-2a}{3} \Rightarrow \frac{-2(-3)}{3}=\boxed{2}$$ → طول مینیمم نسبی تابع

۱۰

$$f(x)=x^4-6x^2+5 \Rightarrow f'(x)=4x^3-12x \Rightarrow 4x(x^2-3)$$

$$0, \quad \pm\sqrt{3}$$

$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$-$		$+$	$-$		$+$
↘		↗	↘		↗

$$f''(x)=12x^2-12 \Rightarrow x=\pm 1$$ → نقاط عطف

$$\Rightarrow A(\sqrt{3},-4) \quad B(-\sqrt{3},-4) \quad \Rightarrow m=0$$

$$C(1,0) \quad D(-1,0) \rightarrow m=0$$

2

خطوط AB و CD متقاطع نیستند، موازی هستند ← زاویه صفر درجه.

رونیا ایوبی

۸

-۰/۵

$$y = x^{۳} + ax^{۲} + bx - ۱ \Rightarrow y' = ۳x^{۲} + ۲ax + b \xrightarrow{x=-۱} y' = ۳ - ۲a + b = ۰$$

$$\xrightarrow{x=-۱} y = -۱ + a - b - ۱ = -۲ + a - b = -۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲a + b = -۳ \\ a - b = -۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۵ \;, b = ۷ \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۵}{۷}$$

عطف $x = \frac{-b}{۳a} \to x = \frac{-a}{۳} \to \frac{-a}{۳} = -۱ \to \boxed{a = ۳}$

$\frac{a}{b} = \frac{۳}{۵}$

$-۴ = -۱ + ۳ - b - ۱ \to \boxed{b = ۵}$

روشا ایوبی

۵ ۱۵

$g(x)=\frac{۳}{۲}\sin x \qquad f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$

$\frac{۳}{۲}\sin x=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x \Rightarrow \sin x=\cos x \xrightarrow{x\in[۰,\pi]} x=\frac{\pi}{۴}$

$\Rightarrow f(x)\ \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ f'(x)=\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}=f'(\frac{\pi}{۴})$

$y=\frac{\sqrt{۲}}{۴}x+b \xrightarrow[y=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}]{x=\frac{\pi}{۴}} \Rightarrow b=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}-\frac{\pi\sqrt{۲}}{۱۶}$

$y-f(\frac{\pi}{۴})=f'(\frac{\pi}{۴})(x-\frac{\pi}{۴}) \to y-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(x-\frac{\pi}{۴}) \xrightarrow{y=۰} -\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(x-\frac{\pi}{۴}) \to x=\frac{\pi}{۴}-۳$

$\longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۴}x=\frac{-\pi\sqrt{۲}}{۱۶}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \boxed{x=۳-\frac{\pi}{۴}}$

۶

$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱ \Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۶(x-۲)(x+۱)$

۲

$A=(۲,-۱۹) \qquad B=(-۱,۸) \Rightarrow m=\frac{۸+۱۹}{-۳}=-۹$

$\Rightarrow ۶x^۲-۶x-۱۲=-۹ \Rightarrow ۲x^۲-۲x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta=۴+۴>۰}$ ۲ نقطه وجود دارد

۷ ۱

$y=kx^۳+(k+۱)x^۲=x^۲(kx+k+۱)$

$\hookrightarrow kx+k+۱=۰ \Rightarrow kx=-k-۱$

$y'=۳kx^۲+(۲k+۲)x$

$\Rightarrow x=-\frac{k-۱}{k} \to k=-۱,۰$

$\Rightarrow y''=۶kx+۲k+۲=۰$

−۱ ۰
− | + | −

$۶kx=-۲k-۲$

$\Rightarrow x=\frac{-۲k-۲}{۶k}\geq ۰$

ج $\frac{-k-۱}{k}\geq ۰$

$\Rightarrow D_g=[-۱,۰]$

−۱ ۰
− | + | −
ج ج

$\Rightarrow D_f=(-\infty,-۱]\cup[۰,+\infty)$

$\Rightarrow D_f\cap D_g=\{-۱,۰\}$

$k=-۱ \longleftarrow$ مقدار صحیح و غیر منفی

$(I)\cap(II) \to k>۰$

$-\frac{k+۱}{۳k}k+k+۱>۰ \to -\frac{k+۱}{۳}+k+۱>۰ \to \frac{۲k+۲}{۳}>۰ \to k+۱>۰ \to \boxed{k>-۱\ (II)}$

رونیا ایوبی

۲)

$y=x^2-1 \Rightarrow y'=2x$

$2x(-2x)=-1 \Rightarrow -4x^2=-1$

$\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow y=x^2-1=\frac{1}{4}-1$

$\Rightarrow y=-\frac{3}{4}$

$\boxed{\left(-\frac{3}{4}\right)\times 2=\left(-\frac{3}{2}\right)}$ ✓

۲

۳)

$m=\frac{6-(-12)}{2{,}5-(-0{,}5)}=6 \Rightarrow y=6x-9$

$f(x)=\frac{a}{2x-1}$

$6x-9=\frac{a}{2x-1}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{(-a)(2)}{(2x-1)^2}=6 \Rightarrow \frac{-a}{(2x-1)^2}=3$

$\Rightarrow a=(-1)(\cancel{3})(2x-1)^2=(\cancel{6x-9})(2x-1)$, 1, $2x-3$

$\Rightarrow -4x^2+4x-1=4x^2-8x+3 \Rightarrow 8x^2-12x+4=0$

$\Rightarrow x=1 \quad , x=\frac{1}{2}$ غ ق ق $\Rightarrow x=1 \Rightarrow a=-3$

$\Rightarrow f(5)=\frac{-3}{10-1}=-\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{f(5)=-\frac{1}{3}}$ ✓

۲

۴)

$y=\frac{x+a}{ax+1} \xrightarrow[\text{مشتق}]{x=0} \frac{(1+a)-a(1+a)}{(1+a)^2}=2$

$\to 1+a$, $\to 1+a$

ق ق

$\Rightarrow 2a^2+4a+2=1-a^2 \Rightarrow 3a^2+4a+1=0 \Rightarrow a=-1 \times, a=-\frac{1}{3}$

$y=\frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1} \xRightarrow{x=1} y=1 \xrightarrow{(1,1)} y=2x+b \Rightarrow 1=2+b$

$\boxed{a-b=\left(-\frac{1}{3}\right)-(-1)=\frac{2}{3}} \Leftarrow b=-1$ ✓

۲