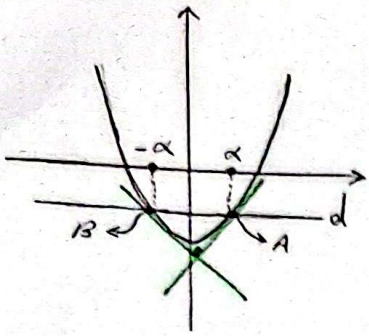
جواب سوال ۲




$y=x^2-1 \rightarrow y'=2x$ $\begin{cases} \alpha \text{ در نقطه } y \text{ شیب خط مماس بر} = 2\alpha \\ -\alpha \text{ شیب خط مماس بر در نقطه} = -2\alpha \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{بر هم عمود}} (2\alpha)(-2\alpha)=-1 \rightarrow 4\alpha^2=1 \rightarrow a=\frac{1}{2}$ (۲)

$\rightarrow y=x^2-1 \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-3}{4}=y \\ \rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-3}{4}=y \end{cases} \rightarrow$ جمع عرض‌ها $\rightarrow \frac{-3-3}{4}=\boxed{\frac{-3}{2}}$

جواب سوال ۴ طبق اطلاعات داده شده در مسئله:

$f'(1)=2$

$f(x)=\frac{x+a}{ax+1} \rightarrow f'(x)=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2} \rightsquigarrow f'(1)=\frac{1-a^2}{(a+1)^2}=\frac{(1-a)(1+a)}{(1+a)^2}=\frac{1-a}{a+1}=2 \rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{3}}$

$f(x)=\frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1}$ (۲)

نقطه $A(1,f(1))$ از $y=2x+b$ گذرد $\rightarrow f(1)=\frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}(1)+1}=1 \rightarrow 2(1)+b=1 \rightarrow \boxed{b=-1}$ $\boxed{a-b=\frac{2}{3}}$

جواب سوال ۶

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1 \rightarrow f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2) \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$

extremum نقاط $\begin{cases} x=-1 \rightarrow y=8 & A(-1,8) \\ x=2 \rightarrow y=-19 & A(2,-19) \end{cases}$ (۲)

$AB$ شیب $\Rightarrow m=\frac{-19-8}{2-(-1)}=\frac{-27}{3}=-9 \rightarrow f'(x)=-9 \rightarrow 6x^2-6x-2=0$

← با توجه به اینکه $a$ و $c$ مختلف العلامت هستند، معادله ۲ جواب دارد.

عین گزینه‌ای

سوال ۱۱

$f(x)=\cos^2(2x)+ax^2+b$

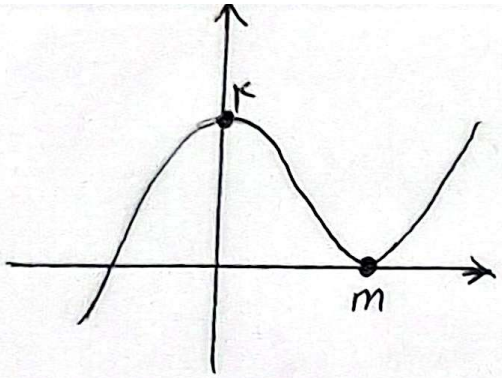
$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0 \rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2(2x)+ax^2+b}{x}=0 \rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1+b}{x}=0 \rightarrow \boxed{b=-1}$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=2 \rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{-4\sin(2x)\cos^2(2x)+2ax}{x}=2 \xrightarrow{\text{هم ارز}} \lim_{x\to 0}\frac{-4\times 2x+2ax}{x}=2$

$\rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{(2a-12)x}{x}=2 \rightarrow 2a-12=2 \rightarrow \boxed{a=7}$

$a+b=6$

جواب سوال ۹




$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (۴)

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

۲

(۱) $\rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow \boxed{b = 0}$

(۲) $\rightarrow f(m) = 0 \rightarrow 3m^2 + 2am = 0 \rightarrow \boxed{m = \frac{-2a}{3}}$

$f\left(\frac{-2a}{3}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{-2a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{-2a}{3}\right) + 4 = 0 \rightarrow a^3 = -27 \rightarrow \boxed{a = -3}$

$m = \frac{-2a}{3} = 2$

سوال ۳

$m = \frac{4-(-12)}{1.5-(-0.5)} = \frac{16}{3} = 4$ ,  $4 = 4(1.5)+b \to b = -9$ $\Big\} \to y = 4x-9$

$\Delta = 0$ ← خط بر سهمی مماس است

$\frac{a}{2x-1} = (4x-9) \to 16x^2-18x-4x+9-a=0 \to 16x^2-22x+9-a=0$

$\xrightarrow{\Delta=0} (22)^2-4(16)(9-a)=0 \to 484-352+64a=0 \to 64a=-132 \to a=-3$

$f(a) = \frac{-1}{3}$

سوال ۱۵

$f(x)=g(x) \to \sin x+\frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{2}\sin x \to \sin x = \cos x \to x = \pi/4$

$f(\pi/4) = \sin(\pi/4)+\frac{1}{2}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \to f'(\pi/4) = \cos(\pi/4)-\frac{1}{2}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$y-f(\pi/4) = f'(\pi/4)(x-\pi/4) \to y-\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x-\pi/4) \xrightarrow{y=0} -\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x-\pi/4) \to x = \pi/4-3$

سوال ۱۷

$y = kx^3+(k+1)x^2 \to y' = 3kx^2+2(k+1)x \to y'' = 6kx+2(k+1)=0$

$x = \frac{-k-1}{3k}$ نقطه عطف در نصف دوم $\to -\frac{k+1}{3k} < 0 \to$ | − | + | − | $\to k<-1$ , $k>0$ (I)

(I) ∩ (II) $\to k>0$

$\to -\frac{k+1}{3k}k+k+1>0 \to -\frac{k+1}{3}+k+1>0 \to \frac{2k+2}{3}>0 \to k+1>0 \to k>-1$ (II)

تنها مقدار صحیح و مثبت است

سوال ۱۸

طول نقطه عطف $= -\frac{b}{3a} \to x = \frac{-a}{3} \to \frac{-a}{3} = -1 \to a = 3$

$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

$-4 = -1+3-b-1 \to b = 5$

سوال ۱۱۰

$f'(x) = 4x^3-12x=0 \to 4x(x^2-3)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases} \to$

| $x$ | $-\sqrt{3}$ | $0$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | − ∅ + | ∅ − | ∅ + |
| $y$ | ↘ min ↗ | ↗ max ↘ | ↘ min ↗ |

$A(-\sqrt{3},-4)$ , $B(\sqrt{3},-4) \to m_{AB}=0$

$f''(x) = 12x^2-12=0 \to 12x^2=12 \to x=\pm1 \to$ نقاط عطف $\to C(1,0)$ , $D(-1,0) \to m_{CD}=0$

دو خط AB و CD ← موازی اند زاویه بین آنها صفر است