سپیده ثنابخش طلبا   ۲۰   تکلیف شماره ۲۷   دوازدهم دختر A - جمعه‌ها

---

①

$f(0)=0$ و $f'(0)=0 , f''(0)=۲$ $f(x)=\cos^۳(۲x)+ax^۲+b$

$f(0)=0 \rightarrow \cos^۳(0)+0+b=0 \rightarrow \boxed{b=-۱}$ $\boxed{a+b=۶}$

$f'(0)=0 \rightarrow ۳\times۲ \sin ۲x \cos^۲(۲x)+۲ax=0$

$f''(0)=۲ \rightarrow -۶(۲\cos(۲x)\cos^۲(۲x)+\underbrace{۴\cos(۲x)\sin(۲x)}_{0})+۲a \rightarrow -۱۲+۲a=۲ \rightarrow \boxed{a=۷}$

✓ ②

---

② وقتی دو خط بر هم عمودند $mm'=-۱$

$f(x)=x^۲-۱ \rightarrow$ $x=\pm\alpha$ این تابع قرینه است در نتیجه

$f'(x)=۲x$ $۲\alpha\times(-۲)\alpha=-۱ \rightarrow -۴\alpha^۲=-۱$ $\alpha=\pm\frac{۱}{۲}$

$f(\frac{۱}{۲})=f(-\frac{۱}{۲})=(\frac{۱}{۲})^۲-۱=-\frac{۳}{۴}\times۲=\underline{\underline{-\frac{۳}{۲}}}$

✓ ②

---

③

$m_{\text{خط مماس}}=\frac{۶-(-۱۲)}{۲٫۵-(-۰٫۵)}=\frac{۱۸}{۳}=۶$ $y=۶x-۹$ معادله مماس $f(x)=\frac{a}{۲x-۱}$

$$\left.\begin{aligned} &۶x-۹=\frac{a}{۲x-۱} \Rightarrow ۱۲x^۲-۶x-۱۸x+۹=a \Rightarrow ۱۲x^۲-۲۴x+۹=a \\ &f'(x)=۶ \Rightarrow \frac{-۲a}{(۲x-۱)^۲}=۶ \Rightarrow ۲۴x^۲-۲۴x+۶=-۲a \end{aligned}\right\} ۴x^۲-۱=-a$$

②

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} -۱۲x^۲+۲۴x-۹=۴x^۲-۱ \rightarrow ۱۶x^۲-۲۴x+۸=0 \begin{cases} x=۱ \rightarrow a=-۳ \\ x=\frac{۱}{۲} \rightarrow a=0 \end{cases}$ غ ق ق ✓

$f(۵)=\frac{-۳}{۹}=\underline{\underline{\frac{-۱}{۳}}}$

---

④

$y=\frac{x+a}{\quad} \Rightarrow y'=\frac{ax+۱-a(x+a)}{\quad}=\frac{۱-a^۲}{\quad}=۲ \quad (x=۱)$

④

$$y=\frac{x+a}{ax+1}\Rightarrow y'=\frac{ax+1-a(x+a)}{(ax+1)^۲}=\frac{۱-a^۲}{(ax+1)^۲}=۲\quad(x=۱)$$

$$\frac{۱-a^۲}{a^۲+۲a+۱}=۲\to ۲a^۲+۴a+۲=۱-a^۲\to ۳a^۲+۴a+۱=۰ \begin{cases} a=-۱ & \text{ریشه‌ی مخرج غ ق ق} \\ \boxed{a=\frac{-۱}{۳}} \end{cases}$$

$$y=\frac{x-\frac{۱}{۳}}{-\frac{۱}{۳}x+۱}\qquad f(۱)=۱\to ۲+b=۱\to\boxed{b=-۱}\qquad a-b=-\frac{۱}{۳}+۱=\boxed{\frac{۲}{۳}}$$

✓ ②

⑤

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{۳}{۲}\sin x\Rightarrow \sin x=\cos x\quad \{۰,\pi\}\quad x=\frac{\pi}{۴}$$

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}\qquad f'(x)=\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x\to f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$y=\frac{\sqrt{۲}}{۴}x+\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}-\frac{\sqrt{۲}\pi}{۱۶}\quad(y=۰)\Rightarrow x=\frac{\pi-۱۲}{۴}$$

✓ ②

⑥

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱\to f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲ \begin{cases} x=-۱ \\ x=۲ \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} & -۱ & ۲ & \\ \hline + & - & + \\ & \text{max} & \text{min} \end{array}\qquad \begin{vmatrix} -۱ \\ ۸ \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} ۲ \\ -۱۹ \end{vmatrix}\qquad AB\to y=-۹x-۱\quad m_{AB}=-۹$$

$$f'(x)=-۹\Rightarrow ۶x^۲-۶x-۱۲=-۹\to ۶x^۲-۶x-۳=۰\quad \Delta>۰$$

دو نقطه دارای این ویژگی است.

✓ ②

۷ هیچ مقدار K

$y=kx^{۳}+(k+۱)x^{۲} \longrightarrow y'=۳kx^{۲}+۲(k+۱)x \longrightarrow y''=۶kx+۲k+۲$

$۶kx+۲k+۲=۰ \longrightarrow x=\frac{-k-۱}{۳k}$ $x<۰$ ناحیه دوم

$\begin{array}{ccccc} & -۱ & & ۰ & \\ \hline - & | & + & | & - \end{array}$

$\left\{(-\infty,-۱)\cup(۰,+\infty)\right\}\cap(-۱,+\infty)=\emptyset$

$f\left(\frac{-k-۱}{۳k}\right)>۰ \longrightarrow k\left(\frac{-k-۱}{۳k}\right)^{۳}+(k+۱)\left(\frac{-k-۱}{۳k}\right)^{۲}>۰ \longrightarrow \frac{۲(k+۱)^{۳}}{۲۷k^{۲}}>۰ \Rightarrow k>-۱$

ناحیه دوم

همواره $+$ $\Leftarrow$ $۲۷k^{۲}$

۲

---

۸ نقطه $(-۱,-٤)$ در معادله صدق می‌کند ←

وقتی خط از منحنی عبور کند یعنی در آن نقطه عطف داریم:

$-۱+a-b-۱=-٤ \longrightarrow a-b=-۲$

$f''(x)=۶x+۲a=۰ \quad (x=-۱)$

$-۶+۲a=۰ \longrightarrow a=۳$

$b=۵ \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$ ج

۲

---

۹ نمودار دارای یک ریشه ساده و یک ریشه مضاعف است.

$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c \qquad f(۰)=۴ \longrightarrow c=۴$

$f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b \Rightarrow f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+۴$

$f'(۰)=۰ \longrightarrow b=۰$

$f'(a)=۰$

↓

min طول

$\Rightarrow f(x)=(x-\alpha)^{۲}+(x-\beta)$

$f(x)=x^{۳}+\alpha^{۲}x-۲\alpha x^{۲}-\beta x^{۲}-\beta\alpha^{۲}+۲\alpha\beta x$

$-۲\alpha-\beta=a$ معادل سازی $\Leftarrow$

$\alpha^{۲}+۲\alpha\beta=۰ \longrightarrow \alpha=-۲\beta$

⑨ نمودار دارای یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف است.

$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$

$f(۰) = ۴ \to c = ۴$

$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b$

$\Rightarrow f(x) = x^۳ + ax^۲ + ۴$

$f'(۰) = ۰ \to b = ۰$

$f'(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{min طول}}}{a}) = ۰$

$\Rightarrow f(x) = (x-\alpha)^۲ + (x-\beta)$

$f(x) = x^۳ + \alpha^۲ x - ۲\alpha x^۲ - \beta x^۲ - \beta\alpha^۲ + ۲\alpha\beta x$

$-۲\alpha - \beta = a$ $\Leftarrow$ معادل سازی

$\alpha^۲ + ۲\alpha\beta = ۰ \to \alpha = -۲\beta$

④

$-\beta\alpha^۲ = ۴ \to -۴\beta^۳ = +۴ \to \beta = -۱$

✓ $\alpha = ۲$

ریشه‌ی مثبت این معادله $\underline{x = ۲}$ است که همان طول min نسبی است.

---

⑩ AB و CD هر دو خطوط موازی با محور xها هستند در نتیجه زاویه‌ی بین آنها صفر است. ✓

②

$f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۵$

$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x \to ۴x(x^۲ - ۳) \begin{cases} \nearrow ۰ \\ \to \sqrt{۳} \\ \searrow -\sqrt{۳} \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccccc} & -\sqrt{۳} & & ۰ & & \sqrt{۳} & \\ \hline - & | & + & | & - & | & + \\ & \text{min} & & \text{max} & & \text{min} & \end{array}$$

$A = \left|\begin{matrix} \sqrt{۳} \\ -۴ \end{matrix}\right.$ $\quad B = \left|\begin{matrix} -\sqrt{۳} \\ -۴ \end{matrix}\right.$

$f''(x) = ۱۲x^۲ - ۱۲ \begin{cases} \to -۱ \\ \to +۱ \end{cases}$

$C = \left|\begin{matrix} -۱ \\ ۰ \end{matrix}\right.$ $\quad D = \left|\begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix}\right.$