دوازدهم دختر A - جمعه ها

تکلیف شماره ۲۷

سپیده ثنایی طلبا

---

①

$f(۰)=۰ \;,\; f'(۰)=۰ \;,\; f''(۰)=۲ \qquad f(x) = \cos^۳(۲x) + ax^۲ + b$

$f(۰)=۰ \rightarrow \cos^۳(۰)+۰+b=۰ \rightarrow \boxed{b=-۱} \qquad \boxed{a+b=۶}$

$f'(۰)=۰ \rightarrow ۳\times۲\,\sin۲x\,\cos^۲(۲x)+۲ax=۰$

$f''(۰)=۲ \rightarrow -۶\big(۲\cos(۲x)\cos^۲(۲x)+\underbrace{۴\cos(۲x)\sin(۲x)}_{۰}\big)+۲a \rightarrow -۱۲+۲a=۲ \rightarrow \boxed{a=۷}$

---

② وقتی دو خط بر هم عمودند $\underline{mm'=-۱}$

$f(x)=x^۲-۱ \rightarrow \qquad x=\pm\alpha$ این تابع قرینه است در نتیجه

$f'(x)=۲x \qquad ۲\alpha\times(-۲)\alpha=-۱ \rightarrow -۴\alpha^۲=-۱ \quad \alpha=\pm\frac{۱}{۲}$

$f(\frac{۱}{۲})=f(-\frac{۱}{۲})=(\frac{۱}{۲})^۲-۱=-\frac{۳}{۴}\times۲=\underline{\underline{-\frac{۳}{۲}}}$

---

③

$m_{\text{خط مماس}}=\frac{۶-(-۱۲)}{۲{,}۵-(-۰{,}۵)}=\frac{۱۸}{۳}=۶ \qquad \underset{\text{معادله مماس}}{y=۶x-۹} \qquad f(x)=\frac{a}{۲x-۱}$

$۶x-۹=\frac{a}{۲x-۱} \Rightarrow ۱۲x^۲-۶x-۱۸x+۹=a \Rightarrow ۱۲x^۲-۲۴x+۹=a$

$f'(x)=۶ \Rightarrow \frac{-۲a}{(۲x-۱)^۲}=۶ \Rightarrow ۲۴x^۲-۲۴x+۶=-۲a$

$\Big\}\; ۴x^۲-۱=-a$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} -۱۲x^۲+۲۴x-۹=۴x^۲-۱ \rightarrow ۱۶x^۲-۲۴x+۸=۰ \left\langle \begin{array}{l} x=۱ \rightarrow a=-۳ \\ x=\frac{۱}{۲} \rightarrow a=۰ \quad \text{غ ق ق} \end{array}\right.$

$f(۵)=\frac{-۳}{۹}=\underline{\underline{\frac{-۱}{۳}}}$

---

④

$y=\frac{x+a}{\quad} \Rightarrow y'=\frac{ax+1-a(x+a)}{\quad}=\frac{۱-a^۲}{\quad}=۲ \quad (x=۱)$

④

$y=\frac{x+a}{ax+1} \Rightarrow y'=\frac{ax+1-a(x+a)}{(ax+1)^۲}=\frac{۱-a^۲}{(ax+1)^۲}=۲ \quad (x=۱)$

$\frac{۱-a^۲}{a^۲+۲a+۱}=۲ \rightarrow ۲a^۲+۴a+۲=۱-a^۲ \rightarrow ۳a^۲+۴a+۱=۰ \begin{cases} a=-۱ \\ \boxed{a=\frac{-۱}{۳}} \end{cases}$ ریشه‌ی مخرج غ‌ق‌ق

$y=\frac{x-\frac{۱}{۳}}{-\frac{۱}{۳}x+۱} \quad f(۱)=۱ \rightarrow ۲+b=۱ \rightarrow \boxed{b=-۱}$

$a-b=-\frac{۱}{۳}+۱=\boxed{\frac{۲}{۳}}$

⑤

$f(x)=g(x) \Rightarrow \sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{۳}{۲}\sin x \Rightarrow \sin x=\cos x \quad [۰,\pi] \quad x=\frac{\pi}{۴}$

$f(\frac{\pi}{۴})=\frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴} \quad f'(x)=\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x \rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

$y=\frac{\sqrt{۲}}{۴}x+\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}-\frac{\sqrt{۲}\pi}{۱۶} \quad (y=۰) \Rightarrow x=\frac{\pi-۱۲}{۴}$

⑥

$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱ \longrightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲ \begin{cases} x=-۱ \\ x=۲ \end{cases}$

$\begin{array}{ccccc} & -۱ & & ۲ & \\ \hline + & | & - & | & + \\ & \text{max} & & \text{min} & \end{array} \quad \begin{array}{|c} -۱ \\ ۸ \end{array} \quad \begin{array}{|c} ۲ \\ -۱۹ \end{array} \quad AB \rightarrow y=-۹x-۱ \quad m_{AB}=-۹$

$f'(x)=-۹ \Rightarrow ۶x^۲-۶x-۱۲=-۹ \longrightarrow ۶x^۲-۶x-۳=۰ \quad \Delta>۰$ دو نقطه دارای این ویژگی است.

⑦ هیچ مقدار K

$y = Kx^۳ + (K+۱)x^۲ \rightarrow y' = ۳Kx^۲ + ۲(K+۱)x \rightarrow y'' = ۶Kx + ۲K + ۲$

$۶Kx + ۲K + ۲ = ۰ \rightarrow x = \frac{-K-۱}{۳K}$ $\quad \underset{\text{ناحیه دوم}}{x < ۰}$ $\quad \begin{array}{ccccc} & -۱ & & ۰ & \\ \hline - & | & + & | & - \end{array}$ $\quad \{(-\infty,-۱)\cup(۰,+\infty)\}\cap(-۱,+\infty) = \varnothing$

$\underset{\text{ناحیه دوم}}{f\left(\frac{-K-۱}{۳K}\right) > ۰} \rightarrow K\left(\frac{-K-۱}{۳K}\right)^۳ + (K+۱)\left(\frac{-K-۱}{۳K}\right)^۲ > ۰ \rightarrow \frac{۲(K+۱)^۳}{\underbrace{۲۷K^۲}_{\text{همواره } \oplus}} > ۰ \Rightarrow K > -۱$

---

⑧ نقطه‌ی (۱-, ۴-) در معادله صدق می‌کند ←

$-۱ + a - b - ۱ = -۴ \rightarrow a - b = -۲$

وقتی خط از منحنی عبور کند یعنی در آن نقطه عطف داریم:

$f''(x) = ۶x + ۲a = ۰ \quad (x = -۱)$

$-۶ + ۲a = ۰ \rightarrow a = ۳$

$b = ۵ \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۳}{۵} = \underline{۰٫۶}$

ج

---

⑨ نمودار دارای یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف است.

$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c \qquad f(۰) = ۴ \rightarrow c = ۴$

$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow f(x) = x^۳ + ax^۲ + ۴$

$f'(۰) = ۰ \rightarrow b = ۰$

$f'(a) = ۰$

↓

min نقطه

$\Rightarrow f(x) = (x-\alpha)^۲ + (x-\beta)$

$f(x) = x^۳ + \alpha^۲ x - ۲\alpha x^۲ - \beta x^۲ - \beta\alpha^۲ + ۲\alpha\beta x$

$-۲\alpha - \beta = a$

$\alpha^۲ + ۲\alpha\beta = ۰ \rightarrow \alpha = -۲\beta$ ⇐ معادل سازی

⑨ نمودار دارای یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف است.

$\Rightarrow f(x)=(x-\alpha)^۲+(x-\beta)$

$f(x)=x^۳+\alpha^۲x-۲\alpha x^۲-\beta x^۲-\beta\alpha^۲+۲\alpha\beta x$

$-۲\alpha-\beta=a$ ⇐ معادل سازی

$\alpha^۲+۲\alpha\beta=۰\rightarrow\alpha=-۲\beta$

$-\beta\alpha^۲=۴\rightarrow-۴\beta^۳=+۴\rightarrow\beta=-۱$

$\alpha=۲$

$f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$

$f(۰)=۴\rightarrow c=۴$

$f'(x)=۳x^۲+۲ax+b$

$\Rightarrow f(x)=x^۳+ax^۲+۴$

$f'(۰)=۰\rightarrow b=۰$

$f'(\underset{\downarrow}{a})=۰$

طول min

ریشه‌ی مثبت این معادله $\underline{x=۲}$ است که همان طول min نسبی است.

---

⑩ AB و CD هر دو خطوط
موازی با محور x هستند
در نتیجه زاویه‌ی بین آنها صفر است.

$f(x)=x^۴-۶x^۲+۵$

$f'(x)=۴x^۳-۱۲x\rightarrow۴x(x^۲-۳)$ → ۰ ، $\sqrt{۳}$ ، $-\sqrt{۳}$

$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	
−		+		−	+
min		max		min	

$A=\left|\begin{matrix}\sqrt{۳}\\-۴\end{matrix}\right.$ $B=\left|\begin{matrix}-\sqrt{۳}\\-۴\end{matrix}\right.$

$C=\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$ $D=\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$

$f''(x)=۱۲x^۲-۱۲$ → -۱ ، $+۱$