سرا حقیقی ۱۹

اگر $f(x)=\cos^3(2x)+ax^2+b$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f''(x)}{x}=2$ مقدار $a+b$ را بیابید.

$f''(x)=-6(2\cos 2x\cos 2x+2x-\sin 2x\cos 2x\sin 2x)+2a=8$

$f'(x)=3\times-1\times2\times\sin(2x)\times\cos^2(2x)+2ax$

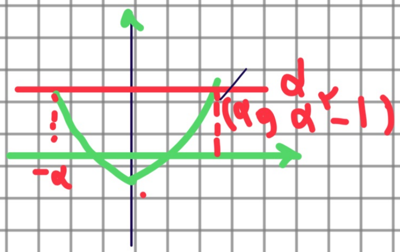
$f(0^+)=0 \quad 1+b=0 \quad b=-1$

$a=7$

$7-1=6$

۴

خط d موازی محور xها، سهمی $y=x^2-1$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه را بیابید.



$y'(\alpha)=2\alpha$ چون عمودند $=+\frac{1}{2\alpha}=4\alpha^2=1 \quad \alpha=\pm\frac12$

$y'(-\alpha)=-2\alpha$

$y(-\alpha)=y(\alpha)=\frac14-1=-\frac34$

$-\frac34\times2=-\frac32$

۳

خط مماس بر منحنی $f(x)=\frac{a}{2x-1}$ از نقاط $(2/5,6)$ و $(-0/5,-12)$ می‌گذرد، مقدار $f(5)$ را بیابید.

شیب خط $a=\frac{6+12}{2/5+0/5}=6$ $\quad y=6x-9$ خط

$f(1)=\frac{a}{1}=-3$

$a=-3$

$\frac{a}{2x-1}=6x-9$

$\cancel{a}=(6x-9)(2x-1)$

$-3\cancel{(2x-1)^2}=\cancel{(2x-1)}(6x-9)$

$-6x+3=6x-9 \quad 12x=12$

$x=1\to y=-3$

$f(5)=\cancel{-\frac{3}{9}}$

$\frac{-2a}{(2x-1)^2}=6\;3$

۴

اگر $y=2x+b$ بر نمودار $y=\frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a-b$ را بیابید.

$y'=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2}=2$

$\frac{(1-a^2)}{(a+1)^2}=2$

$1-a^2=2a^2+2+4a$

$3a^2+4a+1=0$

$a=-1$ غ

$a=-\frac13$

$y(1)=\frac{1+-\frac13}{-\frac13+1}=1$

$y(1)=1 \quad 2+b=1$

$b=-1$

$a-b=-\frac13+1=\frac23$

۲

در نقطه‌ی تلاقی منحنی‌های $f(x)=\sin x+\frac12\cos x$ و $g(x)=\frac32\sin x$ در بازه‌ی $[0,\pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$\frac32\sin x=\sin x+\frac12\cos x$

$\frac12\sin x=\frac12\cos x\to\frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{4}=\frac{3\sqrt2}{4}$

$f'(x)=\cos x-\frac12\sin x$

$f'(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt2}{2}-\frac12\times\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{4}$ شیب

$y=\frac{\sqrt2}{4}\times\frac{\pi}{4}+b=\frac{3\sqrt2}{4}$

$b=\frac{12\sqrt2-\sqrt2\pi}{16}$

$x=-\frac{b}{a}=\frac{\sqrt2\pi-12\sqrt2}{4\sqrt2}=\frac{\pi}{4}-3$

۴

فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها موازی پاره‌خط AB است؟

$6x^2-6x-12=0 \to x=-1$ و $y=8$

$\to x=2$ و $y=-19$

شیب $AB=\frac{27}{-3}=-9$

$6x^2-6x-12=-9$

$6x^2-6x-3=0 \quad \Delta>0\to$ دو نقطه

۲

حورا حقیقی

به ازای چند مقدار صحیح و منفی k نقطه‌ی عطف منحنی $y = kx^3 + (k+1)x^2$ در ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

هیچ مقدار

اشتراک تهی

$3kx^2 + (2k+2)x$

$6kx + 2k+2 = 0$

$x = \frac{2k+2}{-6k} < 0$

$kx\left(-\frac{k+1}{3k}\right)^3 + (k+1)\frac{(k+1)^2}{9k^2}$

$(k+1)^3\left(\frac{k}{-27k^3} + \frac{1}{9k^2}\right) = \frac{2}{27k^2} > 0$

۱- نمی‌تواند باشد زیرا صفر ... می‌شود

(۲)

خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه‌ی $(-1,-4)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ را بیابید.

$-1 + a - b - 1 = -4$

$3x^2 + 2ax + b \rightarrow 3 - 2a + b = 0$

$a - b = -2$

$-2a + b = -3$

$-a = -5$ $\quad a = 5 \quad b = 7$

$\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$

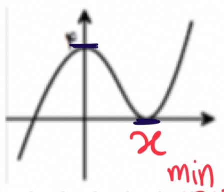
$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{3}{5}}$

$-4 = -1 + 3 - b - 1 \rightarrow \boxed{b = 5}$

عطف $x = \frac{-b}{3a} \rightarrow x = \frac{-a}{3} \rightarrow \frac{-a}{3} = -1 \rightarrow \boxed{a = 3}$

(۱)

نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع را بیابید.



$-\frac{8a^3}{27} + \frac{3ax \cdot 4a^2}{3 \times 9} + 4 = 0$

$3x^2 + 2ax + b$

$x = 0 \quad y' = 0$

$x(3x + 2a) \quad x = -\frac{2a}{3}$

$\frac{4a^3}{27} = -4$

$a^3 = -27 \quad a = -3$

$x = -\frac{2a}{3} = 2$

(۲)

فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ باشند. زاویه‌ی بین پاره‌خط‌های AB و CD را بیابید.

$4x^3 - 12x = 0$

$4x(x^2 - 3) = 0$

$0 \quad \pm\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}$ (B)	0	$\sqrt{3}$ (A)
$-$ | $+$	| $-$	| $+$
min	max	min

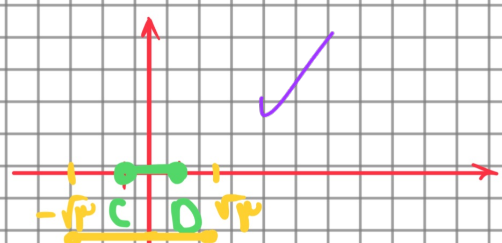
$y(\sqrt{3}) = 9 - 3 \times 6 + 5 = -4$

(۲)

$12x^2 - 12 = 0$

نقاط عطف $x = \pm 1$ و $y(1) = 0$

$y(-1) = 0$



صفر درجه