سارا حقیقی

$f(x)=\cos^{۳}(۲x)+ax^{۲}+b$ و $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\dfrac{f(x)}{x}=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\dfrac{f''(x)}{x}=۲$ مقدار $a+b$ را بیابید.

$f(0^+)=0 \quad 1+b=0 \quad b=-1$

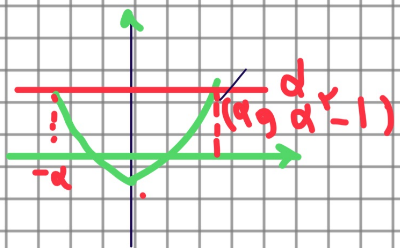
$f''(x)=-6(2\cos 2x\cos 2x+2x-\sin 2x\cos 2x\sin 2x)+2a=8$

$f'(x)=3x-1\times 2x\sin(2x)\times\cos^2(2x)+2ax$

$a=7$

$7-1=6$

خط d موازی محور xها، سهمی $y=x^{۲}-۱$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند مجموع عرض‌های این دو نقطه را بیابید.



چون عمودند

$y'(\alpha)=2\alpha = +\dfrac{1}{2\alpha} = 4\alpha^2=1 \quad \alpha=\pm\dfrac{1}{2}$

$y'(-\alpha)=-2\alpha$

$y(-\alpha)=y(\alpha)=\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}$

$-\dfrac{3}{4}\times 2=-\dfrac{3}{2}$

خط مماس بر منحنی $f(x)=\dfrac{a}{۲x-۱}$ از نقاط $(۲/۵, ۶)$ و $(-۰/۵, -۱۲)$ می‌گذرد، مقدار $f(۵)$ را بیابید.

شیب خط $a=\dfrac{6+12}{2/5+0/5}=6$

$y=6x-9$ خط

$f(1)=\dfrac{a}{1}=-3$

$a=-3$

$x=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{a}{2x-1}=6x-9$

$\dfrac{-2a}{(2x-1)^2}=6 \quad 3$

$\cancel{a}=(6x-9)(2x-1)$

$-3\cancel{(2x-1)^2}=\cancel{(2x-1)}(6x-9)$

$-6x+3=6x-9 \quad 12x=12$

$x=1 \to y=-3$

$f(5)=-\dfrac{3}{9}$

اگر $y=۲x+b$ بر نمودار $y=\dfrac{x+a}{ax+۱}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a-b$ را بیابید.

$y'=\dfrac{1-a^2}{(ax+1)^2}=2$

$\dfrac{(1-a^2)}{(a+1)^2}=2$

$1-a^2=2a^2+2+4a$

$3a^2+4a+1=0$

$a=-1$ غ

$a=-\dfrac{1}{3}$

$y(1)=\dfrac{1+-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+1}=1$

$y(1)=1 \quad 2+b=1$

$b=-1$

$a-b=-\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{2}{3}$

در نقطه‌ی تلاقی منحنی‌های $f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$ و $g(x)=\frac{۳}{۲}\sin x$ در بازه‌ی $[۰,\pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$\dfrac{3}{2}\sin x=\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x$

$\dfrac{1}{2}\sin x=\dfrac{1}{2}\cos x \to \dfrac{\pi}{4}$

$f(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x$

$f'(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ شیب

$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{\pi}{4}+b=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$b=\dfrac{12\sqrt{2}-\sqrt{2}\pi}{16}$

$x=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}\pi-12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}-3$

فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x)=۲x^{۳}-۳x^{۲}-۱۲x+۱$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها موازی پاره‌خط AB است؟

$6x^2-6x-12=0 \to x=-1 , y=8$

$\to x=2 , y=-19$

شیب $AB=\dfrac{27}{-3}=-9$

$6x^2-6x-12=-9$

$6x^2-6x-3=0 \quad \Delta>0 \to$ دو نقطه

حوریا حقیقی

به ازای چند مقدار صحیح و منفی k نقطه‌ی عطف منحنی $y=kx^3+(k+1)x^2$ در ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات قرار دارد؟ هیچ مقدار

اشتراک تهی

$3kx^2+(2k+2)x$

$6kx+2k+2=0$

$x=\frac{2k+2}{-6k}<0$

$k\times\left(-\frac{k+1}{3k}\right)^3+(k+1)\frac{(k+1)^2}{9k^2}$

$(k+1)^3\left(\frac{k}{-27k^3}+\frac{1}{9k^2}\right)=\frac{2}{27k^2}$

۱- نمی‌تواند باشد زیرا صفر مختصات می‌شود

خط مماس بر منحنی $y=x^3+ax^2+bx-1$ در نقطه‌ی $(-1,-4)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ را بیابید.

$-1+a-b-1=-4$

$3x^2+2ax+b \to 3-2a+b=0$

$a-b=-2$

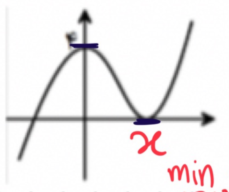
$-2a+b=-3$

$-a=-5$

$a=5$ $b=7$

$\frac{a}{b}=\frac{5}{7}$

نمودار تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع را بیابید.



$-\frac{8a^3}{27}+\frac{3a\times4a^2}{3\times9}+4=0$

$\frac{4a^3}{27}=-4$

$a^3=-27$ $a=-3$

$3x^2+2ax+b$

$x=0$ $y'=0$

$x(3x+2a)$ $x=-\frac{2a}{3}$

$x=-\frac{2a}{3}=2$

فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x)=x^4-6x^2+5$ باشند. زاویه‌ی بین پاره‌خط‌های AB و CD را بیابید.

$4x^3-12x=0$

$4x(x^2-3)=0$

0 $\pm\sqrt3$

B: $-\sqrt3$, 0, A: $\sqrt3$

$-$ | $+$ | $-$ | $+$

min max min

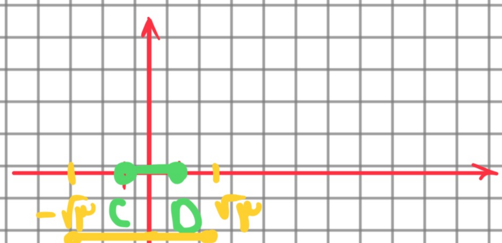
$y(\sqrt3)=9-3\times6+5=-4$

$12x^2-12=0$

$x=\pm1$ نقاط عطف

$y''(1)=0$

$y''(-1)=0$



صفر درجه