Subject:

Year. Month. Date.

مریم ترکمانی دوازدهم A مجتمع تکلیف ۲۸

سوال ۱) $y = x^3 - 3x^2 + 3x \to D_f = \mathbb{R}$

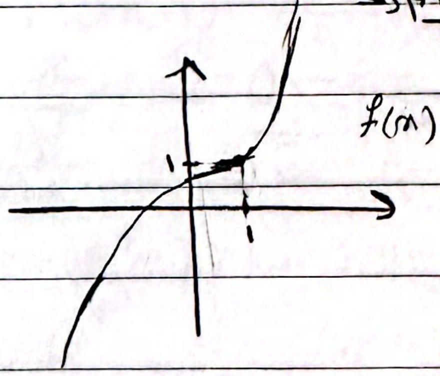
الف) $f' = 3x^2 - 6x + 3 \rightsquigarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightsquigarrow (x-1)^2 = 0$

تنها نقطه بحرانی ← $\boxed{x=1}$

$x = 1 \to f(1) = 1$

ب)

x		1	
y'	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\nearrow$



سوال ۲)

الف) $y = \frac{-x^3+4}{x^2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{\overbrace{-3x^2(x^2)}^{-3x^4} \overbrace{-2x(-x^3+4)}^{+2x^4-8x}}{x^4} = \frac{-x^4 - 8x}{x^4}$

$\Rightarrow \frac{-x(x^3+8)}{x^4} \to$ صورت $= 0$

$\to x = 0$ خارج از دامنه

$(x^3+8) = (x+2)(x^2+4-2x)$

$\boxed{x=-2}$ تنها نقطه بحرانی

$\Delta < 0$ بدون ریشه!

$x = -2 \to f(-2) = 3$

ب) $y = \frac{x^3}{x^2-1} \to D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$y' = \frac{\overbrace{3x^2(x^2-1)}^{3x^4-3x^2} \overbrace{-2x(x^3)}^{-2x^4}}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \to x^4 - 3x^2 = 0$

$\to x^2(x^2-3) = 0 \to \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right\} \to$ ۳ نقطه بحرانی

سوال ۳)

الف) $y = \dfrac{-x^2+4x+1}{x-1} \rightarrow D_f = \mathbb{R}-\{1\}$

$$y' = \frac{(-2x+4)(x-1) - 1(-x^2+4x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2}$$

هرگز صفر نمی‌شود!! و همواره منفی است پس تابع ما، نزولی اکید است.

ب) $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} \rightarrow D_f = \mathbb{R}-\{1\}$

$$y' = \frac{(2x-4)(x-1) - 1(x^2-4x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} = 1$$

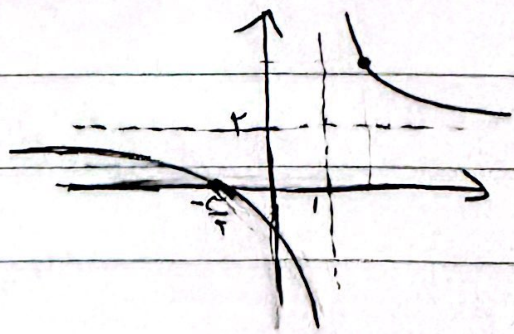
شیب تابع = 1 است و نقطهٔ بحرانی ندارد و اکیداً صعودی است

سوال ۴) $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$

الف) ریشهٔ مخرج = مجانب قائم = $\boxed{1}$

مجانب افقی = $\dfrac{2}{1} = \boxed{2}$

ب)



$y' = \dfrac{-5}{(x-1)^2} \longrightarrow$ همواره نزولی

سوال ۵) (۲و۳) $y=\dfrac{ax+4}{x-b}$

الف) مرکز تقارن ← $(2,3)$ ← مجانب قائم $=2$ ، مجانب افقی $=3$

$2 \rightarrow$ ریشهٔ مخرج $\rightarrow 2-b=0 \rightarrow \boxed{b=2}$ $\quad 3 \rightarrow \dfrac{a}{1}=3 \rightarrow \boxed{a=3}$

ب) $y=\dfrac{3x+4}{x-2} \rightarrow$

$yx-2y=3x+4 \rightarrow yx-3x=2y+4$

$\Rightarrow x(y-3)=2y+4 \rightarrow x=\dfrac{2y+4}{y-3}$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{2x+4}{x-3}}$

سوال ۶) $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$

مجانب قائم = ریشهٔ مخرج $\rightarrow x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2}$

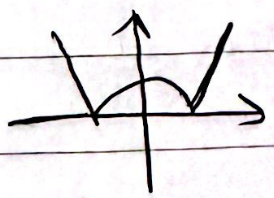
مجانب افقی $=\dfrac{3}{1}=3 \rightarrow \boxed{y=3}$

سوال ۷)

نقاط بحرانی
- تابع مشتق نداشته باشد ← ۳ نقطه
- مشتق تابع = صفر باشد ← ۳ نقطه

در کل $\boxed{\text{۶ نقطهٔ بحرانی داریم!}}$

سوال ۸) $y=|x^2-ax+2|$



برای داشتن ۳ نقطهٔ بحرانی، تابع باید به فرم در بیاید یعنی معادلهٔ درون قدرمطلق باید دو ریشهٔ متفاوت داشته باشد یعنی $\Delta>0$ باشد.

$\Delta=b^2-4ac \rightarrow a^2-4(1\times 2) \rightarrow a^2-8>0$

$a^2>8 \rightarrow \boxed{a>2\sqrt{2}}\ ,\ \boxed{a<-2\sqrt{2}}$

$\boxed{a\in \mathbb{R}-[-2\sqrt{2}\,,+2\sqrt{2}]}$

Year. Month. Date.

سوال ۹)

$$y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2} \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$y' = \frac{2x(x^2+x+2) - (2x+1)(x^2+2)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{x^2-2}{(x^2+x+2)^2}$$

$$x^2-2=0 \rightarrow x=\sqrt{2}, \quad x=-\sqrt{2}$$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
y'	+		−		+
y	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

$$x=-\sqrt{2} \rightarrow y = \frac{4}{4-\sqrt{2}}$$

$$x=+\sqrt{2} \rightarrow y = \frac{4}{4+\sqrt{2}}$$

ضرب

$$\frac{4}{4-\sqrt{2}} \times \frac{4}{4+\sqrt{2}} = \frac{16}{14} = \boxed{\frac{8}{7}}$$

سوال ۱۰)

$$y = x^2+ax+b \rightarrow y = x^2+x-2$$

$$x=-2 \rightarrow 4-2a+b=0 \Rightarrow b-2a=-4$$

$$x=1 \rightarrow 1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1$$

$$a=1,\ b=-2$$

① $y=(x^2+x-2)^2 \rightarrow y' = 2(\underset{-\frac{1}{2}}{2x+1})(x^2+x-2) \rightarrow (\underset{-2}{x+2})(\underset{1}{x-1})$

② $y=(x^2+x-2)^3 \rightarrow y' = 3(2x+1)(x^2+x-2)^2$

①

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	−		+		−		+
y	↘		↗	max نسبی	↘		↗

$$\rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{81}{16}$$

②

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	−		−		+		+
y	↘		↘	min	↗		↗

$$\rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

→ اختلاف طول‌ها

طول خواسته شده $=\boxed{0}$