پاسخ تکلیف سری ۲۸:

۲۰

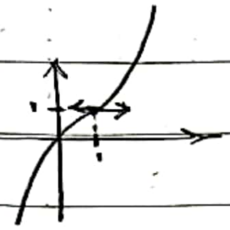
« مبینا غفاریان الحسینی » « دوازدهم ـ دختر جعفر A »

۱ـ الف) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

$y' = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \to x^2 - 2x + 1 = 0 \to (x-1)^2 = 0$

$x = 1$ نقطه بحرانی $(1, 1)$

ب)



۲

۲ـ الف) $y = \dfrac{-x^3 + 4}{x^2}$ $\quad D: \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad y' = \dfrac{-3x^2(x^2) - 2x(-x^3+4)}{x^4}$

$y' = \dfrac{-3x^4 + 2x^4 - 8x}{x^4} = \dfrac{-x^4 - 8x}{x^4} = 0 \to -x(x^3 - 8) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \text{ غ ق ق} \\ x = 2 \end{cases}$

$x^4 = 0 \to x = 0$ غ ق ق

نقطه بحرانی تابع: $x = 2 \to (2, -1)$

ب) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1} \to y' = \dfrac{3x^2(x^2 - 1) - 2x(x^3)}{(x^2-1)^2}$

$D: \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

۲

$y' = \dfrac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \to x^2(x^2 - 3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$(x^2 - 1)^2 = 0$, $x = \pm 1$ غ ق ق

نقاط بحرانی تابع: $x = \{0, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \to (0, 0)\ (\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})\ (-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2})$

۳ـ الف) $y = \dfrac{-x^2 + 4x + 1}{x - 1}$ $\quad D: \mathbb{R} - \{1\}$

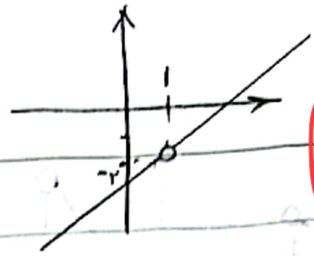
$y' = \dfrac{(-2x + 4)(x - 1) - (-x^2 + 4x + 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2x + \cancel{4x} - 4 + x^2 - \cancel{4x} - 1}{(x-1)^2}$

$y' = \dfrac{-x^2 + 2x - 5}{(x-1)^2}$ $\quad -x^2 + 2x - 5 = 0 \to$ ریشه ندارد $\quad (x-1)^2 = 0 \to x = 1$ غ ق ق $\Rightarrow$ * تابع اکسترمم ندارد

Scanned with CamScanner

$y = x-3$

ب) $y = \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-1}$ $\quad D: \mathbb{R}-\{1\}$



2

$$y' = \frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-\cancel{4x}+4-x^2+\cancel{4x}-3}{(x-1)^2}$$

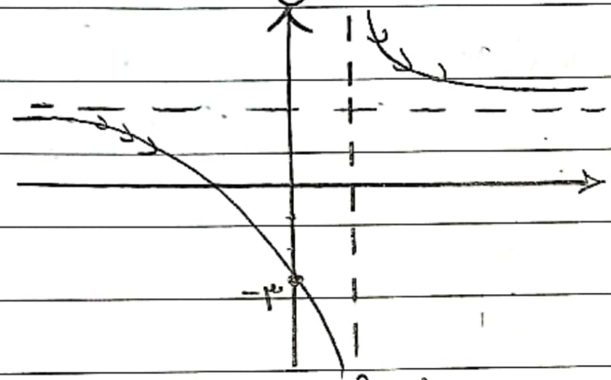
$$y' = \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = 1$$ تابع فاقد اکسترمم است

۴- الف) $y = \frac{2x+3}{x-1}$ $\quad$ مجانب قائم: $x=1$ ریشه مخرج

$-2-3<0$ شاخه‌ها نزولی‌اند

مجانب افقی ← حد تابع در $\pm\infty$: $y=2$

ب) با توجه به شکل تابع از هر ۲ ناحیه عبور می‌کند



2

۵- الف) $a=?$ / $b=?$ $\quad y = \frac{ax+4}{x-b}$ $\quad W(2,3)$

مجانب قائم: $x = b = 2$

مجانب افقی: $\lim_{x\to\infty} \frac{ax+4}{x-b} = a \to y = a = 3$

$\Rightarrow \boxed{a=3}$, $\boxed{b=2}$

2

ب) معکوس تابع؟ چون تابع هموگرافیک ۱-۱ است پس معکوس پذیر است:

$$y = \frac{3x+4}{x-2} \Rightarrow x = \frac{3y+4}{y-2} \Rightarrow y = -\frac{-2x+4}{x-3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x+4}{x-3}$$

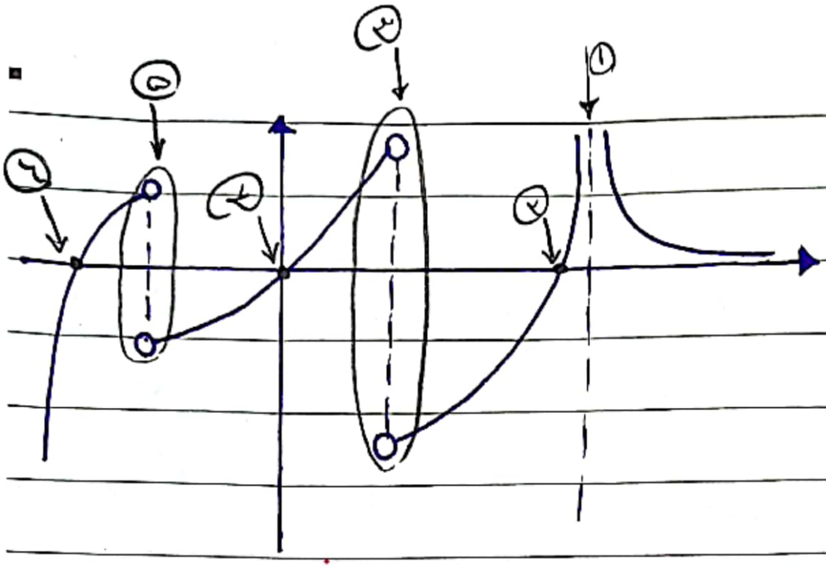
۶- معادله محورهای تقارن؟

$y = \frac{3x+1}{x-2}$ $\quad W(2,3)$

$y - y_w = m(x - x_w) \Rightarrow$ $y-3 = 1(x-2)$, $\boxed{y = x+1}$

$y-3 = -1(x-2)$, $\boxed{y = -x+5}$

2



۷- نمودار تابع f' ← تابع پیوسته f چند بحرانی؟

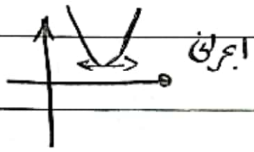
نقاط بحرانی تابع f $\begin{cases} f'(x)=0 \\ f'(x)= \text{وجود ندارد} \end{cases}$

۲

۶ نقطه بحرانی.

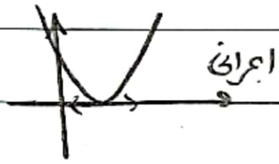
۸- حدود a ← تابع دارای ۳ نقطه بحرانی باشد؟ $y=|x^2-ax+2|$

If $\Delta<0$



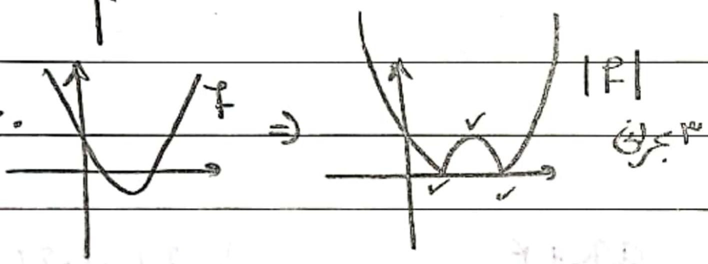
مطابق شکل های رو به رو تابع x^2-ax+2 باید $\Delta>0$ داشته باشد تا $|f|$ دارای ۳ نقطه بحرانی باشد

If $\Delta=0$



۲

If $\Delta>0$



$\Delta: a^2-8>0$

$a^2>8$

$|a|>2\sqrt{2}$ $\begin{cases} a>2\sqrt{2} \\ \text{و} \\ a<-2\sqrt{2} \end{cases}$

۹- $y=\dfrac{x^2+2}{x^2+x+2}$ $\quad y_{min}\times y_{max}=?!$

$\dfrac{x^2+2}{x^2+x+2}=k \Rightarrow x^2+2=kx^2+kx+2k$

$(1-k)x^2-kx-2k+2=0$

۲

$\Delta=0 \Rightarrow k^2-4(1-k)(-2k+2)=0$

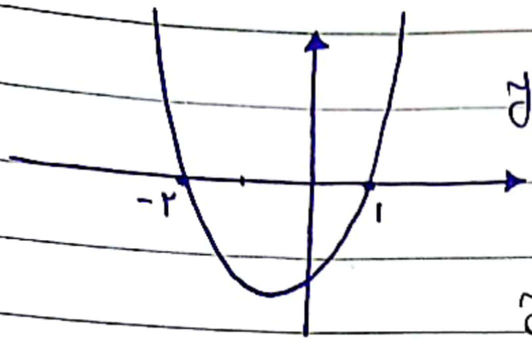
$k^2-4(-2k+2+2k^2-2k)=0$

$k^2-4(2k^2-4k+2)=0 \Rightarrow k^2-8k^2+16k-8=0$

$-7k^2+16k-8=0 \longrightarrow \Delta'=64-56=8 \longrightarrow k=\dfrac{-8\pm\sqrt{8}}{-7}$

$k=\dfrac{8-\sqrt{8}}{7}, \quad k=\dfrac{8+\sqrt{8}}{7} \Rightarrow \boxed{y_{min}\times y_{max}=\dfrac{56}{49}=\dfrac{8}{7}}$

۱۰-



$y = x^2 + ax + b$

$a(x+2)(x-1)$

$a(x^2 + x - 2) \Rightarrow$

$y = x^2 + x - 2 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

۲

$y = (x^2 + ax + b)^2 \to$ طول Max نسبی

$y = (x^2 + x - 2)^2$

$y' = 2(x^2 + x - 2)(2x + 1) = 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \qquad 2x + 1 = 0$

$x = 1 \qquad x = -\frac{1}{2}$

$x = -2$

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

طول Max نسبی $= -\frac{1}{2}$

$y = (x^2 + ax + b)^3 \to$ طول Min نسبی

$y = (x^2 + x - 2)^3$

$y' = 3(x^2 + x - 2)^2(2x + 1) = 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$

$x = 1$ ✗

$x = -2$ ✗

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\searrow$		$\searrow$	Min نسبی	$\nearrow$		$\nearrow$

طول Min نسبی $= -\frac{1}{2}$

اختلاف طول‌ها : صفر