DATE / / SUBJECT : سحر کریمی

۲۰

۱) $xy - y = x^2 + x + 2 \rightarrow x^2 + (x)(1-y) + (2+y) = 0$ ۲

$\Delta \geq 0 \rightarrow (1-y)^2 + (-4)(2+y) \geq 0 \rightarrow 1 + y^2 - 2y - 8 - 4y \geq 0$

$y^2 - 6y - 7 \geq 0 \rightarrow (y-7)(y+1) \geq 0$ $\begin{array}{ccccc} & -1 & & 7 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array}$ $R_f : \mathbb{R} - (-1, 7)$

---

۲) ۲

الف) $x_{ext} = \frac{5}{4}$ $y_{ext} = 2 \times \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 1 = \frac{-17}{8}$

$R_f : [\frac{-17}{8}, +\infty)$

ب) $y = \sqrt{f(x)} \longrightarrow R_{f(x)} :$ $x_{ext} = \frac{-6}{-2} = 3$ $y_{ext} = 4$

$R_f = (-\infty, 4]$

$\downarrow$ جذر

$R_{\sqrt{f(x)}} = [0, 2]$

ج) $y = \sqrt{f(x)}$ چون بزرگترین توان فرد است پس برد $f(x)$ ، $\mathbb{R}$

هست حال ازش جذر میگیریم $\longleftarrow$ $R_{\sqrt{f(x)}} = [0, +\infty)$

د) $\underbrace{x^3 - 6x^2 + 7x + 4}_{f(x)} > 0 \rightarrow f(x) > 0$

چون بزرگترین توان $f(x)$ فرد است پس برد $f(x)$ $\mathbb{R}$ است

حال اگر بخواهیم مثبت باشد برد عبارت جدید : $(0, +\infty)$

$0 < f(x) < +\infty \xrightarrow[\text{صعودی}]{\log_{10}} \underbrace{\log_{10} 0}_{-\infty} < \log f(x) < \underbrace{\log_{10} +\infty}_{+\infty}$

$R_{\log f(x)} = \mathbb{R}$

NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner

۲ ۱۳

الف) $R = \mathbb{R} - \{\text{مجانب افقی}\}$

مجانب افقی به عدد بی‌نهایت است $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x-6} = \frac{3}{2}$

$R = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$

ب) $\sqrt{f(x)}$

ابتدا برد $f(x)$ را بدست می‌آوریم

$\downarrow$

$R_{f(x)} = \mathbb{R} - \{\text{مجانب افقی}\}$

$\downarrow$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x+1}{x+2} = 4$

$\downarrow$

$R_{f(x)} = \mathbb{R} - \{4\}$

$\downarrow$

حالا ریشه دوم می‌گیریم تا برد $\sqrt{f(x)}$ را بدست آوریم:

$R_{\sqrt{f(x)}} = [0, +\infty) - \{2\}$

ج) $y = \frac{x^2+3+1}{\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

عبارت $\sqrt{x^2+3}$ همواره بزرگتر یا مساوی $\sqrt{3}$ است پس مینیمم آن $\sqrt{3}$ خواهد شد. بنابراین:

$\text{Min}\left(\sqrt{x^2+3}\right) \Longrightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow x^2+3 \geq 3 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{x^2+3} \geq \sqrt{3}$

$\rightarrow \text{Min}\left(\sqrt{x^2+3}\right) = \sqrt{3}$

$R_{f(x)} = \left[\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$

NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner

د) $y=\left(x^2+4+\dfrac{1}{x^2+4}\right)-4$

x^2+4 هیچوقت نمی‌تواند ۰ باشد. لذا کمترین مقدار x^2+4 را بدست می‌آوریم که می‌شود ۴ (به ازای $x^2=0$)

$$R_f=\left[4+\frac{1}{4}-4\ ,\ +\infty\right) \longrightarrow R_f=\left[\frac{1}{4}\ ,\ +\infty\right)$$

ه) روش اصلی :

$$y\sin x+3y=2\sin x-1$$

$$\sin x\,(y-2)=-1-3y$$

$$\sin x=\frac{-1-3y}{y-2}$$

$$\underbrace{-1\le \overbrace{\frac{-1-3y}{y-2}}^{}}_{①}\ \underbrace{\le 1}_{②}$$

① : $\dfrac{-1-3y}{y-2}\ge -1 \longrightarrow \dfrac{-1-3y+y-2}{y-2}\ge 0 \longrightarrow \dfrac{-2y-3}{y-2}\ge 0$

	$-\frac{3}{2}$		2	
$-$	0	$+$	تن	$-$

$\Rightarrow \quad y\in\left[-\dfrac{3}{2}\ ,\ 2\right)$

② $\dfrac{-1-3y}{y-2}\le 1 \longrightarrow \dfrac{-1-3y-y+2}{y-2}\le 0 \longrightarrow \dfrac{-4y+1}{y-2}\le 0$

	$\frac{1}{4}$		2	
$-$	0	$+$	تن	$-$

$\left(-\infty\ ,\ \dfrac{1}{4}\right]\cup\left(2\ ,\ +\infty\right)$

$$① \cap ② \longrightarrow R_f=\left[-\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\right]$$

Scanned with CamScanner

DATE / / SUBJECT :

روش دوم) $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3}$

$\sin x$ کمترین مقدار: $-1 \longrightarrow y = \frac{-3}{2}$

$\sin x$ بیشترین مقدار: $1 \longrightarrow y = \frac{1}{4}$

مخرج نمی‌تواند صفر شود

$R_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right]$

$y = \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 1}$ ۱۴

۲

روش اصلی: $x^2y - y = 3x^2 + 4 \longrightarrow x^2(y-3) + (-y-4) = 0$

$\Delta \geq 0 \longrightarrow (-4)(y-3)(-y-4) \geq 0 \longrightarrow (y-3)(4y+16) \geq 0$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & -4 & & 3 & \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$R_f = (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

روش دوم) x^2 کمترین مقدار $= 0 \longrightarrow y = -4$

x^2 بیشترین مقدار $= +\infty \longrightarrow y = 3$

مخرج می‌تواند صفر شود $\longrightarrow$ پس داریم

$R_f = (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

$f(x) = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1}$ ۱۵

$D_{f(x)}: x^2 - x + 1 \neq 0$

$\Delta < 0 \longrightarrow$ هیچ‌وقت ریشه نمی‌دهد و صفر نمی‌شود

۲

$\longrightarrow D_{f(x)} = \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

$R_{f(x)}$: $y=\dfrac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1}=\dfrac{\square+\frac{1}{4}}{\square+1}$

کمترین مقدار x^2-x → $x_{min}=\frac{1}{2}$ ، $y_{min}=-\frac{1}{4}$ → کمترین مقدار $(x^2-x)=-\frac{1}{4}$ → $f(x)=0$

بیشترین مقدار x^2-x → $+\infty$ → $f(x)=1$

$\xrightarrow[\text{صفر شود}]{\text{مخرج نمی‌تواند}}$ $[0,1)$

۲)

الف) $y=|2x-2|-|x-3|$

$x<1$	$1<x<3$	$x>3$
$-2x+2+x-3=-x-1$	$2x-2+x-3=3x-5$	$2x-2-x+3=x+1$

$x\le 1$ ، $-x\ge -1$ ، $-x-1\ge -2$ → $y\ge -2$ (I)

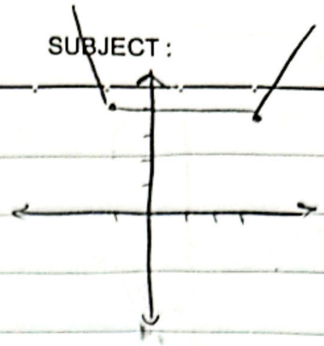
$1<x<3$ ، $3<3x<9$ ، $-2<3x-5<4$ → $-2<y<4$ (II)

$x\ge 3$ → $x+1\ge 4$ → $y\ge 4$ (III)

$(I)\cup(II)\cup(III)$: $R=[-2,+\infty)$

DATE / / SUBJECT :

ب) $y = |x-3| + |x+1|$



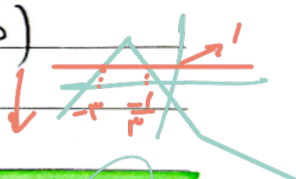
$R_f : [4, +\infty)$

۱۸) $|x-2| - |2x+3| \leq 1$

۲

-1		2
$-x+2+2x+3 \leq 1$	$-x+2-2x-3 \leq 1$	$x-2-2x-3 \leq 1$
$x+4 \leq 1$	$-3x \leq 1$	$-x-5 \leq 1$
$x \leq -3 \xrightarrow{\cap\, x \leq -1}$	$x \geq -\frac{1}{3}$	$-6 \leq x \xrightarrow{\cap\, x \geq 2}$ $x \geq 2$ (III)
$x \leq -3$ (I)	$\xrightarrow{\cap\, -1 \leq x \leq 2} [-\frac{1}{3}, 2]$ (II)	

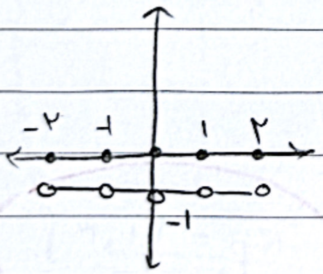
$(I) \cup (II) \cup (III) : \quad x \in (-\infty, -3] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty)$



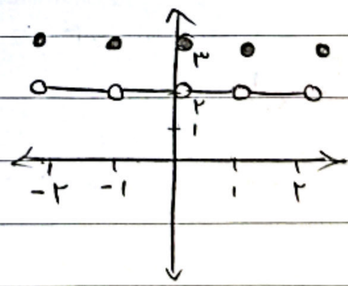
۱۹)

۲

الف) $y = [x] + [3-x] = [x] + 3 + [-x]$



انتقال ۳ به بالا



$R_{f(x)} = \{2, 3\}$

ب) $= 3x - [x]$ $\quad y' = 3 \rightarrow 3$ پس یک سری پاره خط با شیب ۳ داریم

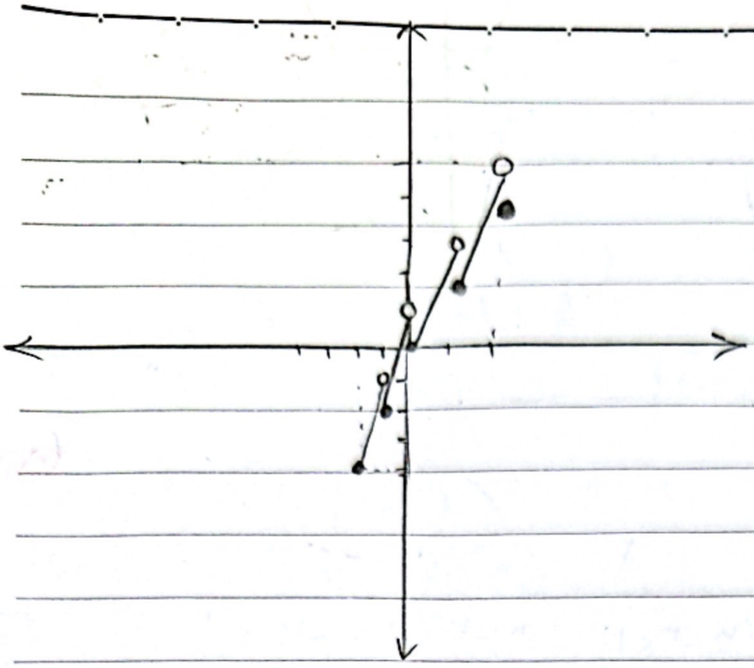
$x = -2 \rightarrow y = -4$ $\quad x = 0 \rightarrow y = 0$

$x = -1 \rightarrow y = -2$ $\quad x = 1 \rightarrow y = 2$

$x = 2 \rightarrow y = 4$

iman NOTEBOOK

Scanned with CamScanner



$R_{f(x)} = [۴, ۵)$

(10

$y = \sin^۲ x - \sin x + 1$

$\to \text{Min } \sin x = -1 \to y = ۳$

$\to \text{Max } \sin x = +1 \to y = 1$

$\to \sin x = \frac{-b}{۲a} = \frac{1}{۲} \to y = \frac{۳}{۴}$

$R_f = [\frac{۳}{۴}, 1]$

$y = \sin^۴ x + \sin^۲ x + 1$

$\text{Min } \sin^۲ x = 0 \to y = 1$

$\text{Max } \sin^۲ x = 1 \to y = ۳$

$\sin^۲ x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-1}{۲} \to \times$ غیرقابل قبول

$R_f = [1, ۳]$

NOTEBOOK iman

Scanned with CamScanner