Subject:
Year: Month: Day:

«دوازدهم دختر A ، جمعه»   آزمون: 19.5   «جبینا هاتف الحسینی»

1-   3

$y=\frac{x^2+x+2}{x-1} \to xy - y = x^2+x+2$

$\Rightarrow x^2 - xy + x + y + 2 = 0 \to x^2 + (1-y)x + y + 2 = 0$

$x = \frac{y-1 \pm \sqrt{(1-y)^2 - 4(y+2)}}{2} \xrightarrow{\Delta \geq 0} (1-y)^2 - 4(y+2) \geq 0$

$y^2 - 2y + 1 - 4y - 8 \geq 0$

$y^2 - 6y - 7 \geq 0 \to (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$

$\begin{cases} y=-1 \\ y=7 \end{cases}$

	-1		7	
$+$	0	$-$	0	$+$

چون در ابتدا $y \neq 1$ فرض کردیم باید $y=1$ را امتحان کنیم:

$1 = \frac{x^2+x+2}{x-1} \to x^2 + \cancel{x} + 2 = \cancel{x} - 1 \Rightarrow x^2 = -3$ ✗

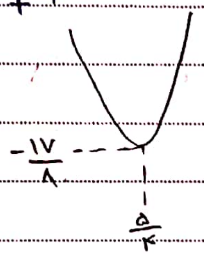
بنابراین برد تابع برابر است با: $R_f = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$

2-   2

الف) $y = 2x^2 - 5x + 1$

می دانیم ضابطه رو به رو یک سهمی است که Min دارد پس:

ext $\left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4} \\ \frac{-17}{8} \end{array} \right.$



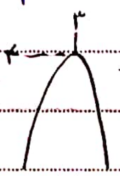
$\Rightarrow R = [\frac{-17}{8}, +\infty)$

ب) $y = \sqrt{-x^2+6x-5}$

هسته عبارت درجه ۲ است پس:

$y = -x^2 + 6x - 5 \to (-\infty, 4] \to \sqrt{(-\infty, 4]} \to R_f = [0, 2]$

ext $\left| \begin{array}{l} \frac{-6}{-2} = 3 \\ 4 \end{array} \right.$



ج) $y = \sqrt{x^7 - 3x^2 + 4x + 1}$

هسته عبارت چند جمله ای درجه فرد است:

$\sqrt{(-\infty, +\infty)} \Rightarrow R = [0, +\infty)$

د) $y = \log(x^3 - 6x^2 + 7x + 4)$

هسته عبارت درجه فرد است و log آن R را قبول می کند پس:

$[0, +\infty) \xrightarrow{\log} R = (-\infty, +\infty)$

۳- تابع مقابل یک تابع هموگرافیک است که برد آن برابر با $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است پس :

الف) $y=\frac{3x+1}{2x-6}$

$R:\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$

ب) $y=\sqrt{\frac{4x+1}{x-2}}$ عبارت زیر رادیکال هموگرافیک است :

$\to \sqrt{\mathbb{R}-\{4\}} \longrightarrow R:[0,+\infty)-\{2\}$

ج) $y=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}$ می‌دانیم : $a+\frac{1}{a}$ پس : $\begin{cases} a>0 & R:[2,+\infty) \\ a<0 & R:(-\infty,-2] \end{cases}$

$y=\frac{x^2+3+1}{\sqrt{x^2+3}} \longrightarrow y=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \longrightarrow R=[2,+\infty)$

می‌دانیم زمانی حاصل عبارت دقیقاً ۲ می‌شود که a بتواند یک شود اما : $\sqrt{x^2+3}=1 \to x^2=-2$ ✗

کمترین مقدار عبارت برابر است با : $x=0 \longrightarrow y=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

پس برد تابع برابر است با :

$R=[\frac{4}{\sqrt{3}},+\infty)$

د) $y=x^2+\frac{1}{x^2+4}$ به عبارت یک چهار اضافه و کم می‌کنیم :

$y=\boxed{x^2+4+\frac{1}{x^2+4}}-4$

اثبات قسمت ج $\to [2,+\infty) \longrightarrow x^2+4=1 \xrightarrow{x=0} y=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4} \longrightarrow R:[\frac{17}{4},+\infty)$

$x^2=-3$ ✗

$R=[\frac{17}{4}-4,+\infty-4) \Rightarrow R_f=[\frac{1}{4},+\infty)$ جواب نهایی

۴- حل با روش اصلی : $y=\frac{3x^2+4}{x^2-1}$

$x^2=\frac{-y-4}{y-3} \longrightarrow x^2=\frac{y+4}{y-3} \longrightarrow \frac{y+4}{y-3}\geq 0$

y		-4		3	
	$+$	0	$-$		$+$

$R=(-\infty,-4]\cup(3,+\infty)$

به کمک تستی ۲ :

$\min x^2=0 \longrightarrow y=-4$

$\max x^2=\infty \longrightarrow y=3 \longrightarrow$ حدی

مخرج می‌تواند صفر شود : $x^2-1=0$ ، $x^2=1$ ، $x=\pm 1$ ✓

پس برد تابع : $R=(-\infty,-4]\cup(3,+\infty)$

Arman

۵ـ روش اصلی:

$$y=\frac{2\sin x-1}{1\sin x+3} \xrightarrow{y=} \sin x=-\frac{3y+1}{y-2}$$

$$\sin x=\frac{3y+1}{2-y} \longrightarrow -1\leqslant\frac{3y+1}{2-y}\leqslant 1$$

$4y-1 \rightarrow y=\frac{1}{4}$

$$\frac{3y+1-2+y}{2-y}\leqslant 0$$

$\hookrightarrow y=2$

y		$+\frac{1}{4}$		2	
	$-$	0	$+$		$-$

$(I)\ (-\infty, +\frac{1}{4}] \cup (2, +\infty)$

$(II)\ [-\frac{3}{2}, 2)$

$(I)\cap(II)$

$\Rightarrow R=[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$

$2y+3 \rightarrow y=-\frac{3}{2}$

$$\frac{3y+1+2-y}{2-y}\geqslant 0$$

$\hookrightarrow y=2$

y		$-\frac{3}{2}$		2	
	$-$	0	$+$		$-$

تذکر ۲:

$\min \sin x=-1 \rightarrow y=-\frac{3}{2}$

$\max \sin x=1 \rightarrow y=\frac{1}{4}$ $\longrightarrow R_f=[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$

۶ـ

$$f(x)=\frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1}$$

مخرج کسر نباید صفر شود:

دامنه تابع: $x^2-x+1\neq 0 \longrightarrow$ عبارت همواره مثبت است $\longrightarrow D_f: \mathbb{R}$

$\Delta=1-4 \quad \Delta<0, a>0$

برد تابع: $y=\frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1} \longrightarrow x^2y-xy+y=x^2-x+\frac{1}{4}$

$(y-1)x^2+(1-y)x+y-\frac{1}{4}=0 \rightarrow \Delta\geqslant 0 \longrightarrow (1-y)^2-4\underbrace{(y-\frac{1}{4})(y-1)}_{(4y-1)}\geqslant 0$

$\cancel{1}-2y+y^2-4y^2+5y\cancel{-1} \rightarrow -3y^2+3y\geqslant 0 \rightarrow 3(y-y^2)\geqslant 0 \rightarrow y-y^2\geqslant 0$

$y(1-y)$

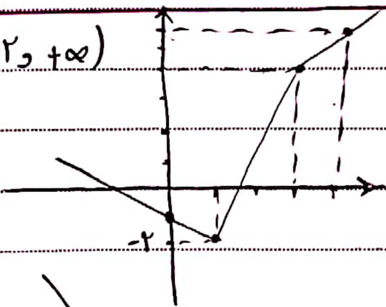
y		0		1	
	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Leftarrow [0,1]$ حالا باید عبارت را به ازای ۱ محاسبه کنیم: $\frac{1}{4}=1$ ✗ پس برد تابع $[0,1)$ است

۷ـ

الف) $y=|2x-2|-|x-3|$ $\quad x=1,\ x=3$ $\quad R=[-2, +\infty)$

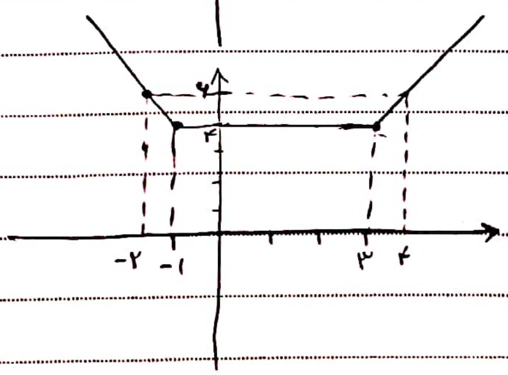
	1	3
$2-2x+x-3$ $-x-1$	$2x-2+x-3$ $3x-5$	$2x-2-x+3$ $x+1$



ب) $y=|x-3|+|x+1|$ $\quad x=3,\ x=-1$

تابع گلدانی

$R_f=[4, +\infty)$



-۸ ۲

$$|x-2| - |2x+2| \leq 1$$

$x=2 \qquad x=-1$

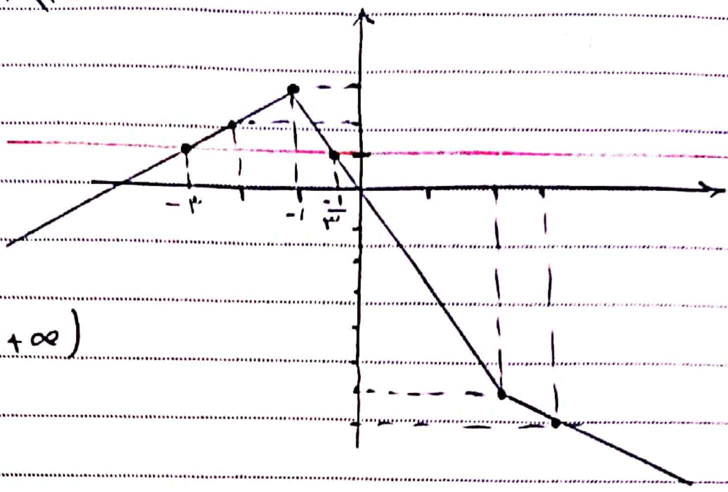
	-1		2	
$-x+2+2x+2$ $x+4$		$2-x-2x-2$ $-3x$		$x-2-2x-2$ $-x-4$

$x+4=1 \qquad -3x=1$

$x=-3 \qquad x=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow (-\infty,-3] \cup [-\frac{1}{3},+\infty)$

$y=1$



-۹ ۱/۵

الف) $y=[x]+[3-x]$ $\qquad x \in [-2,2]$

$\Rightarrow R=[3,4)$

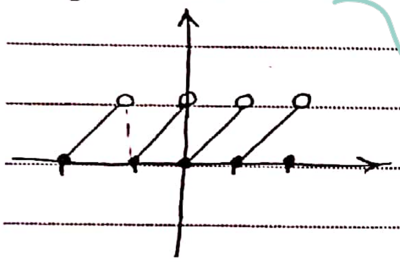
$y=[x]+[-x]+3$

$R_f=\{2,3\}$

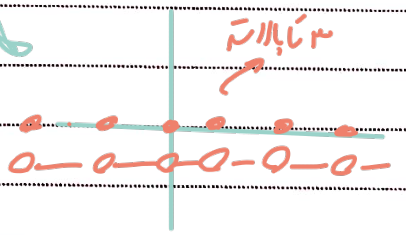
بی دقتی

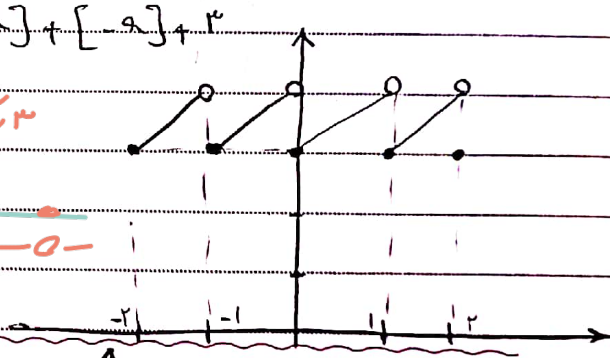
$*y=[x]+[-x]$

$\Rightarrow y=[x]+[-x]+3$



۳ تا بالاتر





ب) $y=3x-[x]$

$-2 \leq x < -1 \longrightarrow y=3x+2$

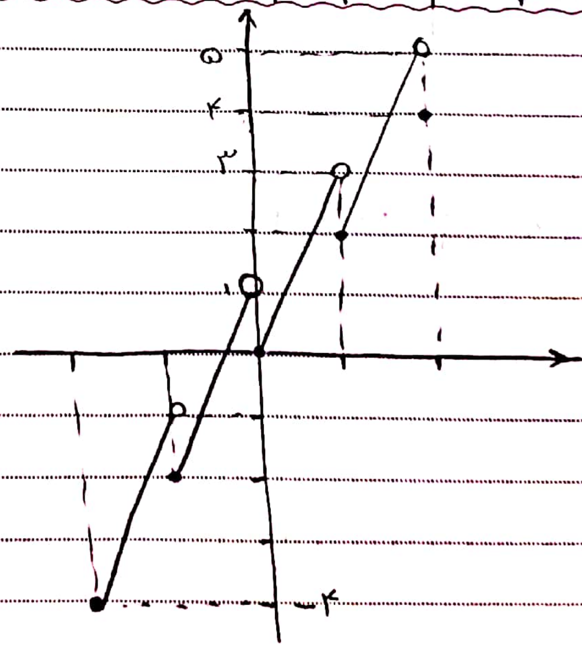
$-1 \leq x < 0 \longrightarrow y=3x+1$

$0 \leq x < 1 \longrightarrow y=3x$

$1 \leq x < 2 \longrightarrow y=3x-1$

$x=2 \longrightarrow y=3x-2$

$\Rightarrow R_f=[-4,5)$



۱۰.

۹

الف) $y = \sin^{۲} x - \sin x + 1$

$$\boxed{} = \sin x \begin{cases} max = 1 \longrightarrow 1 \\ min = -1 \longrightarrow ۳ \\ \dfrac{-b}{۲a} = \dfrac{1}{۲} \longrightarrow \dfrac{1}{۴} - \dfrac{1}{۲} + 1 = \dfrac{۳}{۴} \end{cases} \Rightarrow R_f = \left[\dfrac{۳}{۴}, ۳\right]$$

ب) $y = \sin^{۴} x + \sin^{۲} x + 1$

$$\boxed{} = \sin^{۲} x \begin{cases} max = 1 \longrightarrow ۳ \\ min = 0 \longrightarrow 1 \\ \dfrac{-b}{۲a} = \dfrac{-1}{۲} \times \end{cases} \Rightarrow R_f = [1, ۳]$$