Subject:
Year: Month: Day:

«دبیرستان الف الحسینی» «دوازدهم دختر A جعبه»

۱-

$y=\frac{x^2+x+2}{x-1} \to xy-y=x^2+x+2$

$\Rightarrow x^2-xy+x+y+2=0 \to x^2+(1-y)x+y+2=0$

$x=\frac{y-1\pm\sqrt{(1-y)^2-4(y+2)}}{2} \xrightarrow{\Delta\geq 0} (1-y)^2-4(y+2)\geq 0$

$y^2-2y+1-4y-8\geq 0$

$y^2-6y-7\geq 0 \to (-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$

$\begin{cases} y=-1 \\ y=7 \end{cases}$

-1		7	
$+$	0 $-$	0	$+$

چون در ابتدا $y\neq 1$ فرض کردیم باید $y=1$ را امتحان کنیم:

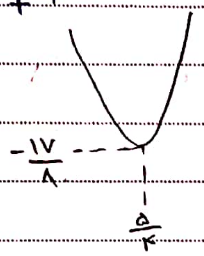
$1=\frac{x^2+x+2}{x-1} \to x^2+\cancel{x}+2=\cancel{x}-1 \Rightarrow x^2=-3$ ✗

بنابراین برد تابع برابر است با: $R_f=(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$

۲- می‌دانیم ضابطه روبه‌رو یک سهمی است و Min دارد پس:

الف) $y=2x^2-5x+1$

ext $\left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a}=\frac{5}{4} \\ \frac{-17}{8} \end{array}\right.$

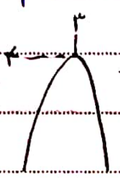


$\Rightarrow R=[-\frac{17}{8},+\infty)$

ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$

هسته‌ی عبارت درجه ۲ است پس:

$y=-x^2+6x-5$



$\to (-\infty,4] \to \sqrt{(-\infty,4]} \to R_f=[0,2]$

ext $\left| \begin{array}{l} \frac{-6}{-2}=3 \\ 4 \end{array}\right.$

ج) $y=\sqrt{x^7-3x^2+4x+1}$

هسته‌ی عبارت چندجمله‌ای درجه فرد است:

$\sqrt{(-\infty,+\infty)} \Rightarrow R=[0,+\infty)$

د) $y=\log(x^3-6x^2+7x+4)$

هسته‌ی عبارت درجه فرد است ولی log همه R را قبول نمی‌کند پس:

$[0,+\infty) \xrightarrow{\log} R=(-\infty,+\infty)$

Arman

Scanned with CamScanner

۳ـ تابع مقابل یک تابع هموگرافیک است که برد آن برابر با $IR-\{\frac{a}{c}\}$ است پس: الف) $y=\frac{3x+1}{2x-6}$

$R: IR-\{\frac{3}{2}\}$

ب) $y=\sqrt{\frac{4x+1}{x-2}}$ عبارت هموگرافیک است: $\sqrt{IR-\{4\}} \longrightarrow R: [0,+\infty)-\{2\}$

ج) $y=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}$ می‌دانیم: $a+\frac{1}{a}$ پس: $\begin{cases} a>0 & R:[2,+\infty) \\ a<0 & R:(-\infty,-2] \end{cases}$

$y=\frac{x^2+3+1}{\sqrt{x^2+3}} \longrightarrow y=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \longrightarrow R=[2,+\infty)$

می‌دانیم زمانی حاصل عبارت دقیقاً ۲ می‌شود که a بتواند یک شود اما: $\sqrt{x^2+3}=1 \rightarrow x^2=-2$ ✗

کمترین مقدار عبارت برابر است با: $x=0 \longrightarrow y=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

پس برد تابع برابر است با:

$R=[\frac{4}{\sqrt{3}},+\infty)$

د) $y=x^2+\frac{1}{x^2+4}$ به عبارت یک چهار اضافه و کم می‌کنیم:

$y=\boxed{x^2+4+\frac{1}{x^2+4}}-4$

مانند قسمت ج $\longrightarrow [2,+\infty) \longrightarrow x^2+4=1 \xrightarrow{x=0} y=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4} \longrightarrow R:[\frac{17}{4},+\infty)$

$x^2=-3$ ✗

$R=[\frac{17}{4}-4,+\infty-4) \Rightarrow R_f=[\frac{1}{4},+\infty)$ جواب نهایی:

۴ـ حل با روش اصلی: $y=\frac{3x^2+4}{x^2-1}$

$x^2=\frac{-y-4}{y-3} \longrightarrow x^2=\frac{y+4}{y-3} \longrightarrow \frac{y+4}{y-3}\geq 0$

	-4		3	
$+$	0	$-$		$+$

$R=(-\infty,-4]\cup(3,+\infty)$

به کمک تفکر ۲:

$min\ x^2=0 \longrightarrow y=-4$

$max\ x^2=\infty \longrightarrow y=3 \longrightarrow$ حدی

مخرج می‌تواند صفر شود: $x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=\pm1$ ✓

$R=(-\infty,-4]\cup(3,+\infty)$ پس برد تابع:

Arman

Scanned with CamScanner

۵- روش اول:

$$y = \frac{2\sin x - 1}{1\sin x + 3} \Rightarrow \sin x = -\frac{3y+1}{y-2}$$

$$\sin x = \frac{3y+1}{2-y} \longrightarrow -1 \leq \frac{3y+1}{2-y} \leq 1$$

$$\frac{3y+1-2+y}{2-y} \leq 0 \qquad 4y-1 \to y=\frac{1}{4}, \quad 2-y \to y=2$$

	$\frac{1}{4}$		2	
$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

$$(\mathrm{I}) \quad [-\infty, +\tfrac{1}{4}] \cup (2, +\infty)$$

$$\frac{3y+1+2-y}{2-y} \geq 0 \qquad 2y+3 \to y=-\frac{3}{2}, \quad 2-y \to y=2$$

	$-\frac{3}{2}$		2	
$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

$$(\mathrm{II}) \quad [-\tfrac{3}{2}, 2)$$

$$(\mathrm{I}) \cap (\mathrm{II}) \Rightarrow R = [-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{4}]$$

تذکر ۲:

$$\min \sin x = -1 \to y = -\frac{3}{2}$$
$$\max \sin x = 1 \to y = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow R_f = [-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{4}]$$

۶-

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1}$$

برد تابع زیر را بیابید؟

دامنه تابع: $x^2 - x + 1 \neq 0 \longrightarrow$ عبارت همواره مثبت است $\longrightarrow D_f : \mathbb{R}$

$\Delta = 1 - 4 \quad \Delta < 0, \; a > 0$

برد تابع: $y = \dfrac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1} \longrightarrow x^2y - xy + y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

$$(y-1)x^2 + (1-y)x + y - \frac{1}{4} = 0 \to \Delta \geq 0 \longrightarrow (1-y)^2 - 4\underbrace{(y-\tfrac{1}{4})(y-1)}_{(4y-1)} \geq 0$$

$$\cancel{1} - 2y + y^2 - 4y^2 + 5y - \cancel{1} \to -3y^2 + 3y \geq 0 \longrightarrow 3(y - y^2) \geq 0 \to y - y^2 \geq 0 \quad y(1-y)$$

	0		1	
$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

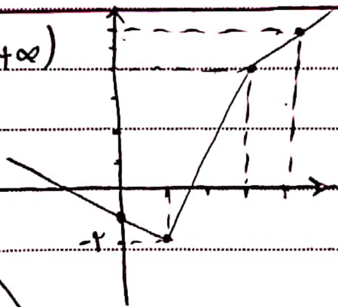
حالا باید عبارت را به ازای $[0,1)$ محاسبه کنیم: $\frac{1}{4} = 1$ ※ پس برد آن $[0,1)$ است

۷-

الف) $y = |2x - 2| - |x - 3| \qquad R = [-2, +\infty)$

$x = 1 \qquad x = 3$

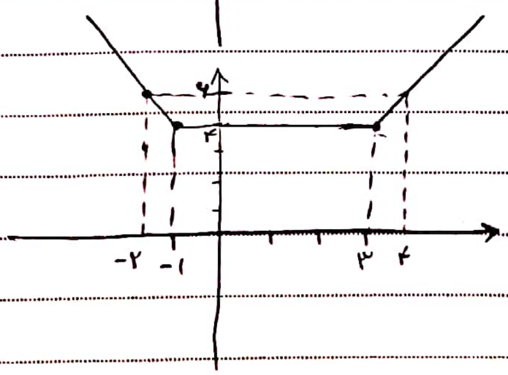
1		3	
$2 - 2x + x - 3$	$2x - 2 + x - 3$		$2x - 2 - x + 3$
$-x - 1$	$3x - 5$		$x + 1$



ب) $y = |x - 3| + |x + 1|$

$x = 3 \qquad x = -1$

تابع گلدانی $\quad R_f = [4, +\infty)$



Scanned with CamScanner

۸-

$$|x-2| - |2x+2| \leq 1$$

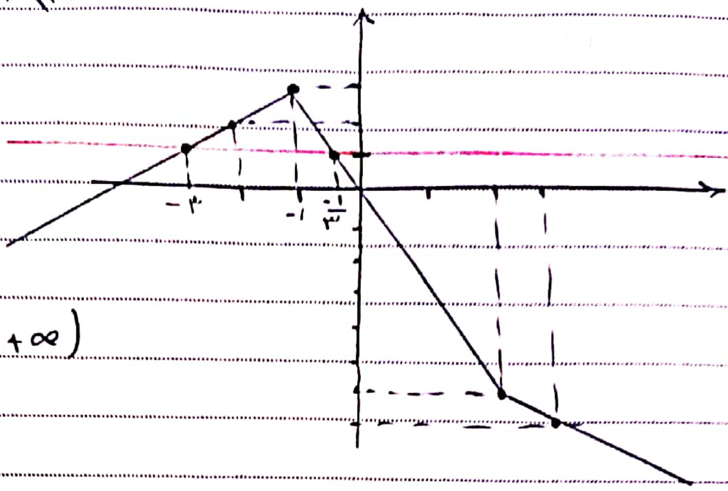
$x=2$, $x=-1$

-1		2
$-x+2+2x+2$ $x+4$	$2-x-2x-2$ $-3x$	$x-2-2x-2$ $-x-4$

$x+4=1 \quad -3x=1$

$x=-3 \quad x=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow (-\infty,-3] \cup [-\frac{1}{3},+\infty)$

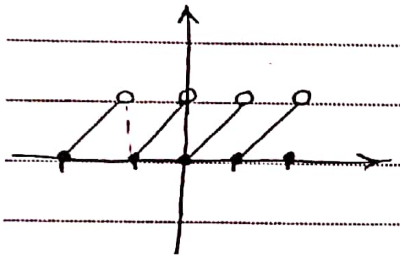


۹-

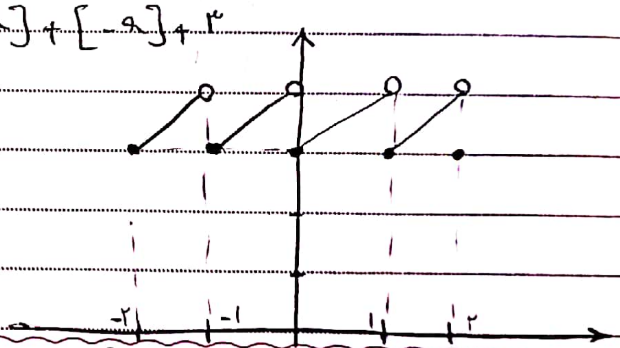
الف) $y=[x]+[3-x]$ $\quad x\in[-2,2]$

$y=[x]+[-x]+3$ $\quad \Rightarrow R=[3,4)$

$* \; y=[x]+[-x]$



$\Rightarrow y=[x]+[-x]+3$



ب) $y=3x-[x]$

$-2\leq x<-1 \longrightarrow y=3x+2$

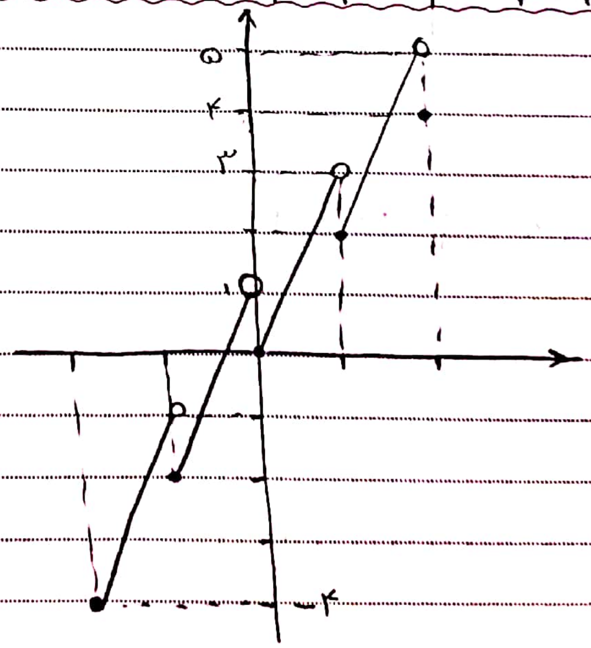
$-1\leq x<0 \longrightarrow y=3x+1$

$0\leq x<1 \longrightarrow y=3x$

$1\leq x<2 \longrightarrow y=3x-1$

$x=2 \longrightarrow y=3x-2$

$\Rightarrow R_f=[-4,5)$



Arman

Scanned with CamScanner

Subject:
Year: Month: Day: page: ( )

۱.

الف) $y = \sin^2 x - \sin x + 1$

$\square = \sin x \begin{cases} max = 1 \longrightarrow 1 \\ min = -1 \longrightarrow 3 \\ \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow R_f = [\frac{3}{4}, 3]$

ب) $y = \sin^4 x + \sin^2 x + 1$

$\square = \sin^2 x \begin{cases} max = 1 \longrightarrow 3 \\ min = 0 \longrightarrow 1 \\ \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} \times \end{cases} \Rightarrow R_f = [1, 3]$

Scanned with CamScanner