نگین نیکوی    ۲۰    دوازدهم دفتر A    تکلیف ۳

---

۱- در روش اصلی x را از معادله خارج و سپس دامنه حساب می‌کنیم ۴

$$y=\frac{x^2+x+2}{x-1} \Rightarrow yx-y=x^2+x+2$$

$$-x^2+(y-1)x-y-2=0 \Rightarrow x^2+(1-y)x+2+y=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x=\frac{-(1-y)\pm\sqrt{(1-y)^2-4(2+y)}}{2} \Rightarrow (1-y)^2-4(2+y)\geq 0$$

$$\Delta \geq 0$$

$$y^2+1-2y-8-4y\geq 0$$

$$y^2-6y-7\geq 0$$

$$(y-7)(y+1)\geq 0$$

| | $-1$ | | $7$ | |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | $0$ | | $0$ | $+$ |

$$R_f=(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$$

---

۲- ۴

الف) $2x^2-5x+1$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} x_{min}=\frac{-b}{2a}=\frac{5}{4} \\ y_{min}=2\times\frac{25}{16}-5\times\frac{5}{4}+1=\frac{25}{8}-\frac{25}{4}+1=\frac{25-50+8}{8}=\frac{-17}{8}\end{cases}$

$a>0$

$$R_f=[-\frac{17}{8},+\infty)$$

ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x_{max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-2}=3 \\ y_{max}=-(3)^2+6(3)-5=-9+18-5=4\end{cases}$

ابتدا عبارت را بدون رادیکال حساب و سپس رادیکال را تاثیر می‌دهیم

$$f(x)=-x^2+6x-5 \longrightarrow R_f=(-\infty,4] \longrightarrow R_{\sqrt{f(x)}}=[0,2]$$

ج) $y=\sqrt{x^7-3x^2+3x+1} \rightarrow R_f=[0,+\infty)$ چون نباید منفی باشد

اگر رادیکال نداشت چون برد تمام توابع از مرتبه فرد برابر R است برد آن برابر R بود

اما چون زیر رادیکال حتی نتواند منفی باشد و جواب آن داریم:

د) $\log(x^3-6x^2+7x+4) \rightarrow (-\infty,+\infty)$

چون تابع از مرتبه فرد است برد R است. و لگاریتم نیز همینطور است

---

۳- ۲

الف) $y=\frac{3x+1}{2x-2}$ $\xrightarrow[\text{هموگرافیک}]{\text{توجه به روش}}$ $y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow R-\{\frac{a}{c}\} \Rightarrow R_f=R-\{\frac{3}{2}\}$

ب) $y=\sqrt{\frac{4x+1}{x-2}}$ $\xrightarrow{\text{توجه به هموگرافیک}}$ $R_f=[0,+\infty)-\{2\}$

$\frac{a}{c}=4 \longrightarrow \sqrt{\frac{a}{c}}=2$

چون زیر رادیکال نامنفی است و جواب رادیکال نیز نامنفی است

ج) $y=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

کمترین مقدار $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{3}$

$$R_f=[\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty)$$

چهارتا اضافه و کسر کنیم،

$x^2+4+\frac{1}{x^2+4}-4$

$4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

کمترین مقدار $\Rightarrow x^2+4=0+4=4$

$[\frac{17}{4}, +\infty) \xrightarrow{-4} [\frac{1}{4}, +\infty)$

---

۴-

$y=\frac{3x^2+4}{x^2-1} \xrightarrow{\text{روش اصلی}} yx^2-y=3x^2+4$

$y-3\neq 0$

$y\neq 3$

$(y-3)x^2-y-4=0 \Rightarrow y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$b=0$

$\Delta=0-4(y-3)(-y-4)$

$\Rightarrow \Delta\geq 0$

$\Delta=(4y+16)(y-3)$

یا $(3-y)x^2=-(4+y) \Rightarrow x^2=\frac{y+4}{y-3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{y+4}{y-3}} \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{}$

تدریج $\rightarrow 0\leq x^2<+\infty \rightarrow \frac{3(0)+4}{0-1}=\frac{4}{-1}=-4$

$\rightarrow 3$

$x^2-1=0$

$x^2=\pm 1$ مخرج نباید صفر باشد

$\rightarrow R_f=R-[-4, +3]=(-\infty,-4]$

$\cup\ (3,+\infty)$

---

۵-

$y=\frac{2\sin x-1}{\sin x+3} \xrightarrow{\text{روش اصلی}} y\sin x+3y=2\sin x-1$

$(2-y)\sin x=3y+1 \Rightarrow \sin x=\frac{3y+1}{2-y}$

فرض نمی‌تواند صفر باشد $\rightarrow -y+2\neq 0 \rightarrow y\neq 2 \rightarrow -1\leq \sin x\leq 1$

$-1\leq\frac{3y+1}{2-y}\leq 1$

$\frac{3y+1-2+y}{2-y}\leq 0$

$\frac{3y+1+2-y}{2-y}\geq 0$

① $\frac{4y-1}{2-y}\leq 0$ و ② $\frac{2y+3}{2-y}\geq 0$

① ∩ ② $\rightarrow R_f=[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$

حل تدریج $\rightarrow y=\frac{2\sin x-1}{\sin x+3}$

$\min \sin x=-1 \rightarrow \frac{2(-1)-1}{(-1)+3}=\frac{-3}{2}$

$\max \sin x=+1 \rightarrow \frac{1}{4}$

$R_f=[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$

---

۶-

$f(x)=\frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1}=\frac{\overbrace{(x-\frac{1}{2})^2}^{\text{همواره نامنفی}}}{x^2-x+1}$

$\Delta<0$

$a>0$ همواره مثبت است

$D_f=R$

$yx^2-yx+y=x^2-x+\frac{1}{4}$

$x^2(y-1)+(-y+1)x+y-\frac{1}{4}=0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2(y-1)}$

$y-1\neq 0$

$y\neq 1$

$\Delta\geq 0 \rightarrow b^2-4ac\geq 0$

$(-y+1)^2-4\underbrace{(y-1)(y-\frac{1}{4})}_{y^2-\frac{5}{4}y+\frac{1}{4}}\geq 0$

$y^2+1-2y-4y^2+5y-1\geq 0$

$-3y^2+3y\geq 0$

$3y(-y+1)\geq 0$

$R_f=[0,1)$

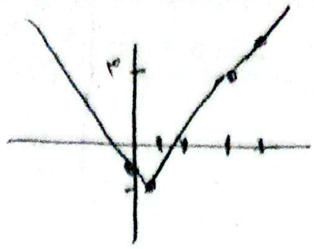
۷- بازه‌بندی

$y = |2x-2| - |x-3|$

$1 \qquad 3$

$2-2x-3+x \qquad 2x-2+x-3 \qquad 2x-2-x+3$

$-x-1 \qquad 3x-5 \qquad x+1$



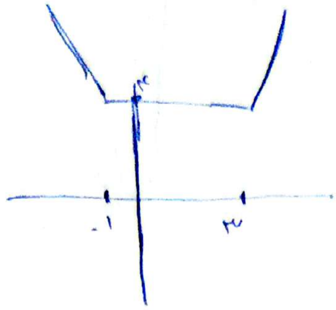
$R_f = [-2,+\infty)$

$y = |x-3| + |x+1|$

ریشه‌یابی

$x-3=0$
$x=3$

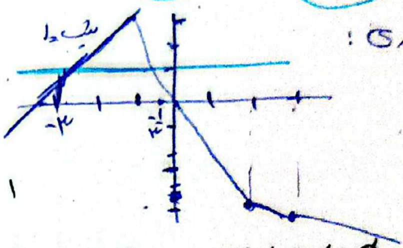
$x+1=0$
$x=-1$



$R_f = [4,+\infty)$

۸- بازه‌بندی:

$|x-2| - |2x+2| \le 1$



$-1 \qquad 2$

$2-x+2x+2 \le 1$
$x+4 \le 1$
$x \le -3$
$\cap$
$x \le -1$
$x \in (-\infty,-3]$

$2-x-2x-2 \le 1$
$-3x \le 1$
$-\frac{1}{3} \le x$
$\cap$
$-1 \le x \le 2$
$[-1,-\frac{1}{3})$

$x-2-2x-2 \le 1$
$-x-4 \le 1$
$-5 \le x \cap x \ge 2 \to x \in \emptyset$

$x \in R-(-3,\frac{1}{3}]$

جواب. $R-(-3,-\frac{1}{3})$

۹-

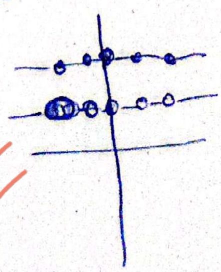
الف) $y = [x] + [3-x]$

$\Rightarrow [x]+[-x]+3$

می‌دانیم این مقدار در

$x \in Z \to y=0 \xrightarrow{+3} y+3=3$

$x \notin Z = -1 \xrightarrow{+3} y+3=2$



$R_f$

ب) $y = 3x - [x]$

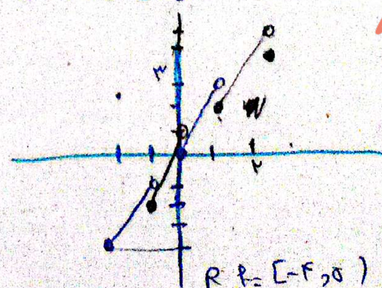
$-2 \le x < -1 \to [x]=-2 \to y=3x+2$ $\quad 3(-2)+2=-4,\ 3(-1)+2=-1$

$-1 \le x < 0 \to [x]=-1 \to y=3x+1$ $\quad 3(-1)+1,\ 3(0)+1$

$0 \le x < 1 \to [x]=0 \to y=3x$

$1 \le x < 2 \to [x]=1 \to y=3x-1$ $\quad 3(1)-1,\ 3(2)-1$

$x=2 \to [x]=2 \to 3x-2 = 3(2)-2 = 4$



$R_f = [-4,5)$

-۱۵

$y = \sin^۲ x - \sin x + 1 \longrightarrow \sin x \begin{cases} (-1)\ min \to 1+1+1=۳ \\ (1)\ max \to 1-1+1=۳ \quad \alpha = (1) \\ \frac{-b}{۲a} = \frac{1}{۲} \to (\frac{1}{۲})^۲ - \frac{1}{۲} + 1 = \frac{۳}{۴} \checkmark \end{cases}$

$R_f = [\frac{۳}{۴}, ۳]$

$y = \sin^۴ + \sin^۲ x + 1 \to \sin^۲ x \begin{cases} (1)\ max \to 1+1+1=۳ \\ (0)\ min \to 0+0+1 \\ \frac{-b}{۲a} = \frac{-1}{۲} \to غ ق ق \end{cases}$

$R_f : [1, ۳]$ ✓

۲