۱)

$y = \dfrac{x^2+x+2}{x-1} \rightarrow yx - y = x^2+x+2$

$\rightarrow x^2 + x(1-y) + 2+y \rightarrow$ x جواب داشته باشد پس:

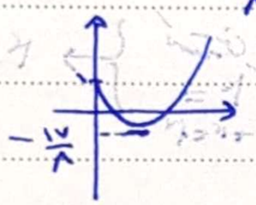
$b^2-4ac \geq 0 \rightarrow 1+y^2-2y-8-4y \geq 0 \rightarrow y^2-6y-7 \geq 0$

$(y-7)(y+1) \geq 0$ — -1, 7: $+ \mid - \mid +$ $\rightarrow \boxed{R_f = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)}$

۲) الف) $2y = 2x^2 - 5x + 1$

عرض رأس min را در نقطه $\rightarrow \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{5}{4} \rightarrow 2 \times \dfrac{25}{16} - 5 \times \dfrac{5}{4} + 1 = \dfrac{25}{8} - \dfrac{50}{8} + \dfrac{8}{8}$

$= \dfrac{-17}{8}$



$\rightarrow \boxed{R_f = [-\frac{17}{8}, +\infty)}$

ب) $\sqrt{-x^2+6x-5}$

max است که نقطه max $\longrightarrow \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \rightarrow -9+18-5 = 4 \rightarrow (-\infty, 4]$

$\xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{[0, 2] = R_f}$

ج) $y = \sqrt{x^7 - 3x^2 + 4x + 1} \longrightarrow$ IR ← بزرگترین توان فرد است

$\xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{R_f = [0, +\infty)}$

د) $\log(\underbrace{x^3 - 6x^2 + 7x + 4}) \longrightarrow \boxed{R_f = (-\infty, +\infty) = IR}$

برد IR دارد $[0, +\infty)$ — از IR log بگیریم

۳) الف) $y = \dfrac{3x+1}{2x-6} \rightarrow$ ~~x=~~ $\underline{-2y} \rightarrow R_f = IR - \{\frac{3}{2}\}$

تابع هموگرافیک است $\rightarrow R_f = IR - \{\frac{a}{c}\}$

ج) $y = \sqrt{\dfrac{4x+1}{x-2}} \longrightarrow$ تابع هموگرافیک $\rightarrow R_f = IR - 2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{R_f = [0, +\infty) - \{2\}}$

~~$R_f = [0, +\infty) - \{4\}$~~

2-) $y = \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{x^2+3+1}{\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

تفکیک می‌کنیم

کمترین مقدار را به دست می‌آوریم $= \sqrt{0+3} = \sqrt{3}$

کمترین مقدار را می‌یابیم

$\to \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \to \boxed{R_f = [\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty)}$

3) $x^2 + \frac{1}{x^2+4} \to x^2 + \frac{1}{x^2+4} + 4 - 4 \to$

$\underbrace{x^2+4 + \frac{1}{x^2+4}} - 4 \to \boxed{R_f = [\frac{1}{4}, +\infty)}$

$a + \frac{1}{a} \to$ وقتی $0 < a$ کم

$\xrightarrow{\text{کمترین مقدار } a}$ $4 =$; $x^2+4 = 0+4 = 4$ $\to 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

$\frac{17}{4} - 4 = \frac{1}{4}$

---

4) $y = \frac{3x^2+4}{x^2-1} \to$ روش اول : $yx^2 - y = 3x^2 + 4$

$(y-3)x^2 = 4+y \to x^2 = \frac{y+4}{y-3} \to x = \pm\sqrt{\frac{y+4}{y-3}}$

$\to \frac{y+4}{y-3} \geq 0$ $\quad$ (-4, 3: $+ \; - \; +$) $\to R_f = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$

تذکر $\to y = \frac{3x^2+4}{x^2-1} \to \xrightarrow{\min} x^2 = 0 \to \frac{4}{-1} = -4$

$\xrightarrow{\max} x^2 = +\infty \to \frac{3(\cancel{\infty})+4}{(\cancel{\infty})-1}$ ناصفر

$\to = 3 \to$ مرز صفر است $\to x^2 = 1$ ✓ $x = \pm 1$ $\to \boxed{R_f = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)}$

---

5) $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3} \to$ حل: $y\sin x + 3y = 2\sin x - 1 \to \sin x = \frac{3y+1}{2-y}$

$\sin x\,(y-2) = -3y-1$

$-1 \leq \frac{3y+1}{2-y} \leq 1 \to$

1) $-2+y \leq 3y+1 \to -3 \leq 2y \to y \geq -\frac{3}{2}$

2) $3y+1 \leq 2-y \to 4y \leq 1 \to y \leq \frac{1}{4}$

$\to \boxed{R_f = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]}$

۵) سینوس ل ← باید کرد ۲ تا

$$y = \frac{2\sin x - 1}{\underbrace{\sin x + 3}} \rightarrow \xrightarrow{\min} \sin x = -1 \rightarrow \frac{-2-1}{-1+3} = \frac{-3}{2}$$

$$\xrightarrow{\max} \sin x = 1 \rightarrow \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

مخرج صفر × ← چون $\underline{\sin x \neq -3}$ ← عدد ۲ کنند

با $R_f = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$

---

۶)

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1} \rightarrow$$

$D_f \rightarrow x^2 - x + 1 \neq 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 < 0 \rightarrow$ هیچ وقت صفر نمی‌شود

$\rightarrow \underline{D_f = \mathbb{R}}$

$$y = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1} \rightarrow \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = y \rightarrow y(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}y = (x-\frac{1}{2})^2$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow (y-1)(x-\frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}y \rightarrow (x-\frac{1}{2})^2 = \frac{\frac{3}{4}y}{1-y}$$

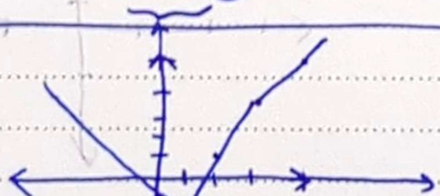
است! ≥ 0

$$\rightarrow \frac{3y}{4-4y} \geq 0 \rightarrow \begin{array}{ccccc} & 0 & & 1 & \\ - & 0 & + & | & - \end{array} \rightarrow \boxed{R_f = [0, 1)}$$

---

۷) الف) $y = |2x-2| - |x-3|$

شکل می‌کشیم با یک نقطه کمتر و بیشتر از ریشه‌ها و خود ریشه‌ها →



$\rightarrow \boxed{R_f = [-2, +\infty)}$

$x = 1, 3$

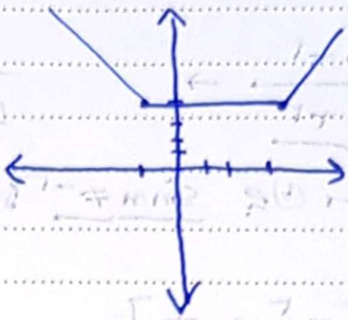
x	1	3	2	0	4
y	−2	4	1	−1	5

۷) ب) $y=|x-3|+|x+1|$

تابع گلدانی است با کف $= 4 = 3-(-1)$

۲ با شیب راست و چپ ۲ و ۲-

لذا $R_f=[4,+\infty)$



---

۸) محدوده جواب = ?

$|x-2|-|2x+2|\le 1$

$x<-1$	$-1\le x<2$	$x\ge 2$
$2-x+2x+2\le 1$	$2-x-2x-2\le 1$	$x-2-2x-2\le 1$
$x+4\le 1$	$-3x\le 1$	$-x-4\le 1$
$x\le -3$ ✓	$x\ge -\frac{1}{3}$	$-x\le 5$
$\underbrace{-3<x\le -1}_{ok}$	$-\frac{1}{3}\le x<2$	$x\ge -5$ ✓
		$x\ge 2$ ✓

$-1\le x\le -\frac{1}{3}$ نبود!

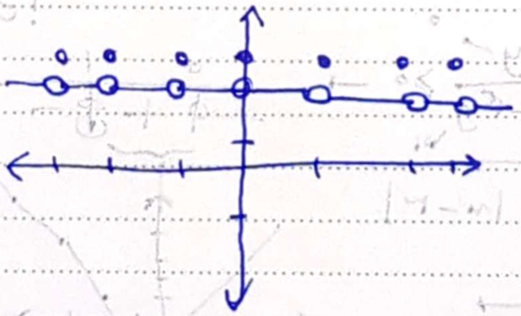
$\boxed{D_f=\mathbb{R}-\left(-3,-\frac{1}{3}\right)}$

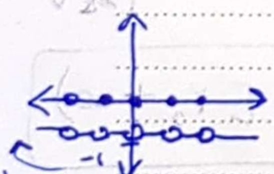
---

۹) $[-2,2]$

الف) $y=[x]+[3-x]$

$y=[x]+[-x]+3$





ب) $y=3x-[x]$

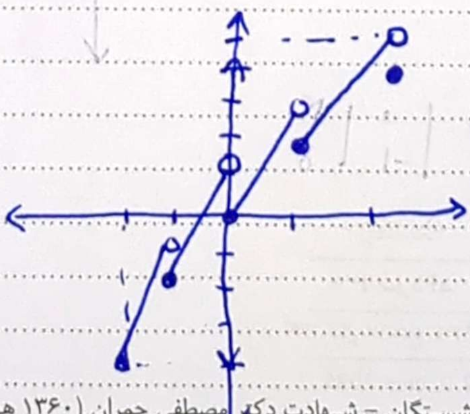
$[-2,-1)\to 2x+2$

$[1,2)\to 2x-1$

$\{2\}\to 4$

$[-1,0)\to 2x+1$

$[0,1)\to 2x$



Date : .... Subject : ....

۱۰) $R_f = ?$

الف) $y = \sin^2 x - \overset{\text{مربع}}{\sin x} + 1 \rightarrow$

min → $\sin x = -1 \rightarrow = 1 + 1 + 1 = 3$ ✓

max → $\sin x = 1 \rightarrow = 1 - 1 + 1 = 1$

$-\frac{b}{2a}$ → $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4}$ ✓

$\rightarrow \boxed{R_f = [\frac{3}{4}, 3]}$

ب) $y = \sin^4 x + \overset{\text{مربع}}{\sin^2 x} + 1 \rightarrow$

min → $\sin^2 x = 0 \rightarrow = 0 + 0 + 1 = 1$ ✓

max → $\sin^2 x = 1 \rightarrow 1 + 1 + 1 = 3$ ✓

$-\frac{b}{2a}$ → $\sin^2 x = \frac{-1}{2}$ غ ق ق

$\rightarrow \boxed{R_f = [1, 3]}$