هیوا تائی - دوازدهم دختر A

(۱) الف) $y=\left(x-2\left[\frac{x}{2}\right]\right)^2 \xrightarrow{\text{فاکتور از ۲}} \left(2\left(\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]\right)\right)^2 \longrightarrow [0,1) \leftarrow \frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]$ برد

$\xrightarrow{\text{اعمال تغییرات}} [0,2) \xrightarrow{\text{توان ۲}} [0,4)$

ب) $-\sin x+\log y-4=0 \quad \log_{10}^{y}=\sin x+4 \xrightarrow{b^c=a} y=10^{\sin x+4}$ برد $=\mathbb{R}$

(۲) $y=\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-9}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2=\frac{x^2-4}{x^2-9} \quad y^2x^2-9y^2=x^2-4 \quad x^2(y^2-1)=9y^2-4$

$x^2=\frac{9y^2-4}{y^2-1} \quad x=\sqrt{\frac{9y^2-4}{y^2-1}} \xrightarrow{\text{دامنه}} \frac{9y^2-4}{y^2-1}\geq 0 \to y^2=\frac{4}{9} \quad y=\pm\frac{2}{3}$

$\to y^2=1 \quad y=\pm 1$

	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	
$+$	$-$		$+$	$-$	$+$

$[a,b]\cup(c,+\infty) \to \left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]\cup(1,+\infty) \xrightarrow[b=\frac{2}{3} \quad c=1]{a=-\frac{2}{3}} a+b+c \to -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+1 \to 1$

(۳) الف) $y=x+\frac{1}{x}+2\sqrt{x+\frac{1}{x}} \quad \sqrt{x+\frac{1}{x}}=t \xrightarrow{\text{میدانیم } x+\frac{1}{x}\geq 2} \sqrt{x+\frac{1}{x}}\geq\sqrt{2}$

$\to t^2+2t \xrightarrow{t\in[\sqrt{2},+\infty)} \xrightarrow[\text{کمترین مقدار}]{t=\sqrt{2}} 2+2\sqrt{2} \longrightarrow$ برد $=R_f=[2+2\sqrt{2},+\infty)$

$y=(3-\sin x)(1+\sin x) \to 3+3\sin x-\sin x-\sin^2 x \to y=-\sin^2 x+2\sin x+3$

$\begin{cases} max \to 1 \to 4 \\ min \to -1 \to 2 \\ -\frac{b}{2a} \to -\frac{2}{-2}=1 \to f(1)=4 \end{cases}$ برد $=[2,4]$

(۴) $y=-\frac{1}{3}x+10 \xrightarrow{\text{دامنه: } \{1,2,\dots,9\}}$

$1\Rightarrow\frac{29}{3} \quad 3\Rightarrow 9 \quad 5\Rightarrow\frac{25}{3} \quad 7\Rightarrow\frac{23}{3} \quad 9=7$

$2\Rightarrow\frac{28}{3} \quad 4\Rightarrow\frac{26}{3} \quad 6\Rightarrow 8 \quad 8=\frac{22}{3}$

جمع تمام اعداد $=\frac{29+28+\dots+22}{3}+7+8+9 \to 51+24 \to \boxed{75}$

(۵) چون ۲ و ۱ جودن پس معادله تنها یک ریشه ۲ داشته پس ریشه مضاعف است و همچنین طبق تعیین علامت $a\leq 0$

$y=\sqrt{ax^2+bx+c} \xrightarrow{\text{دامنه}} ax^2+bx+c\geq 0$

$f(3)=1 \quad \sqrt{9a+3b+c}=1 \to \sqrt{9a-12a+c}=1 \quad 9a-12a+c=1 \quad c-3a=1$

$b^2-4ac>0 \quad -\frac{b}{2a}=2 \to b=-4a$

$f(2)=0 \quad \sqrt{4a+2b+c}=0 \longrightarrow 4a-8a+c=0 \longrightarrow c-4a=0$

$c - 3a = 1 \qquad 4 - 3a = 1 \qquad a = 1 \qquad b = -4a \rightarrow y = \sqrt{-4x^2 + x + 4}$

$c - 4a = 0 \rightarrow -4 + 4a = 0 \qquad c = 4 \qquad b = -4$

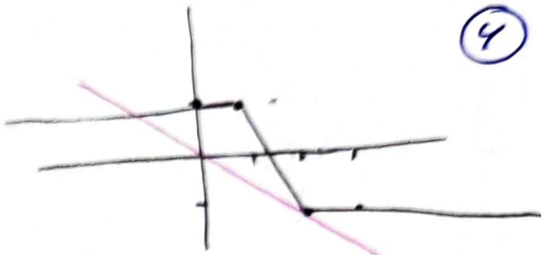
$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{-8} = \dfrac{1}{8} \\ \rightarrow -4\left(\dfrac{1}{64}\right) + \dfrac{1}{8} + 4 \Rightarrow \dfrac{65}{16} \end{cases} \quad R_f = \sqrt{\left(-\infty, \tfrac{65}{16}\right]} \Rightarrow R_f = \left[0, \tfrac{\sqrt{65}}{4}\right]$$

---

(۶)

$|x-2| - |x-1| = kx \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$

x	0	1	2	3
y	1	1	−1	−1



← اگر kx این جوری باشه ۲ جواب داریم پس $y = kx$ باید از نقطه $\frac{2}{-1}$ بگذرد ↶

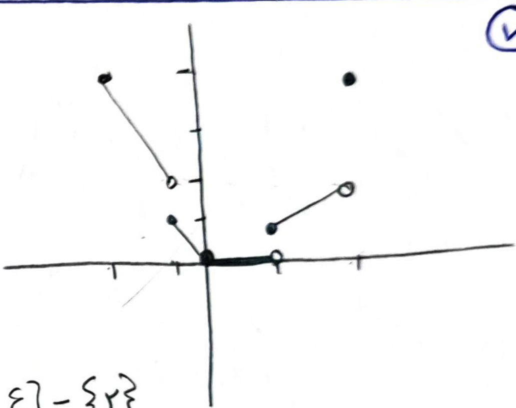
$-1 = 2k \quad \boxed{k = -\frac{1}{2}}$

---

(۷)

$y = x[x]$

$-2x$	$-2 \leq x < -1$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{-1}{2}$
$-x$	$-1 \leq x < 0$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{0}{0}$
0	$0 \leq x < 1$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{0}$
x	$1 \leq x < 2$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$
$2x$	$x = 2$	$\frac{2}{4}$	

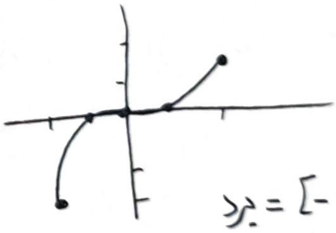


برد: $[0, 4] - \{2\}$

$y = x|x| - x \quad \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ -x^2 - x & x < 0 \end{cases}$

x	0	1	2
y	0	0	2

x	−2	−1	0
y	−2	0	0



برد $= [-2, 2]$

---

(۸)

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\underbrace{x^2+x}_{x(x+1)}} \times x(x+1) \rightarrow x+1 + x + 1 \rightarrow y = 2x+2$$

در تابع اصلی ۱- و صفر را نفی کنند $\longrightarrow f(-1) \rightarrow -2+2 \rightarrow \boxed{0}$ $\quad$ برد $= R - \{0, 2\}$ $\quad a + b = 2$

$f(0) \rightarrow 0 + 2 \rightarrow \boxed{2}$

---

(۹)

$$y = \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{x - 2\sqrt{x} + 1} \xrightarrow{\text{تجزیه}} y = \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}-3)}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}-1)} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$$

$$y\sqrt{x} - y = \sqrt{x} - 3 \quad \sqrt{x}(y-1) = y - 3 \quad \sqrt{x} = \frac{y-3}{y-1} \quad x = \frac{(y-3)^2}{(y-1)^2} \rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

(10)

$$y = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x-x-2 & x-1 \\ \hline -x^3 \pm x^2 & x^2+3x+2 \\ \hline 3x^2-x-2 & \\ -3x^2 \pm 3x & \\ \hline 2x-2 & \\ -2x \pm 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{(x+1)}(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}$$

$$y = x+2 \xrightarrow[\text{است}]{\text{دامنه فاقد ۱ و ۱- است}} \left.\begin{array}{l} f(1) = 3 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} 3+1 = \boxed{4}$$