مریم توکلی دوازدهم A دفتر تکالیف ۵

سوال ۱)

$f(۲x+۱)+f(x+۲)=۳x+f(۳)$ $y=\sqrt{f(x)-x^۲}$

تابع خطی $\rightarrow ax+b$

$f(۲x+۱)=a(۲x+۱)+b \rightarrow ۲ax+a+b$

$f(x+۲)=a(x+۲)+b \rightarrow ax+۲a+b$

$f(۳)=۳a+b$

$\rightarrow ۲ax+a+b+ax+۲a+b=۳x+۳a+b \rightarrow ۳ax+\cancel{۳a}+۲b=۳x+\cancel{۳a}+b$

$\Rightarrow ۳ax+۲b=۳x+b \Rightarrow ۳ax+b=۳x \rightarrow \underline{a=۱}$

$b=۰$

$\Rightarrow f(x)=x$

$y=\sqrt{x-x^۲} \rightarrow ext \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴} \rightarrow R_f=(-\infty, \frac{۱}{۴}] \end{array} \right.$

y_{max}

تابع y_{max} دارد (بدلیل ضریب منفی $x^۲$)

$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \boxed{R_f=[۰, \frac{۱}{۲}]}$

سوال ۲) $f(x)=\frac{x^۳-۴x}{x+۲}$ $D_f=\mathbb{R}-\{a,b\}$ $R_f=[c,+\infty)-\{۸\}$

$f(\frac{a+b}{۲c})=?$

برای بدست آوردن برد ساده می‌کنیم $\rightarrow \frac{x(x-۲)\cancel{(x+۲)}}{\cancel{x+۲}}=x^۲-۲x \rightarrow ext \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{۲a}=۱ \\ ۱-۲=\underline{-۱} \end{array} \right.$

y_{min}

$R_f=[-۱,+\infty)-\{۸\} \Rightarrow x^۲-۲x\neq ۸ \rightarrow x^۲-۲x-۸\neq ۰$

$\underline{c=-۱}$

$\rightarrow (x-۴)(x+۲)\neq ۰ \left< \begin{array}{l} x\neq ۴ \\ x\neq -۲ \end{array} \right.$ پس $a=-۲$ ، $b=۴$

از مخرج نیز بود!

$\frac{a+b}{۲c}=\frac{-۲+۴}{-۲}=-۱ \Rightarrow f(-۱)=(-۱)^۲-۲(-۱)=\boxed{۳}$

آپادانا

سوال ۳) $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳+ax^۲+bx-۸}$ $D_f=[a,b]$

تابع خطی است. پس فرم اصلی آن که $ax+b$ است. با توجه به عبارت زیر رادیکال می‌توان فهمید که در زیر رادیکال $(x-۲)^۳$ داریم که پس از ساده شدن، به فرم تابع خطی در می‌آید!

$f(x)=\sqrt[۳]{(x-۲)^۳} \longrightarrow x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸ \longrightarrow \underline{a=-۶}$, $\underline{b=۱۲}$

$D_f=[-۶,۱۲]$

$f(x)=x-۲ \xrightarrow{x_{min}=-۶} y_{min}=\underline{-۸}$

$x_{max}=۱۲ \longrightarrow y_{max}=\underline{۱۰}$

$\longrightarrow \boxed{R_f=[-۸,۱۰]}$

سوال ۴) $y_۱=\left(\frac{x+۱}{۱-x}\right)^{\frac{۱}{۵}}$ $y_۲=\frac{ax^۲-۱}{x^۲+b}$

$D_{f_۱}=R_{f_۲}$ $a+b=?$

$y_۱=\sqrt[۵]{\frac{x+۱}{۱-x}} \longrightarrow x\neq۱ \longrightarrow D_{f_۱}=\mathbb{R}-\{۱\}$

$y_۲=\frac{ax^۲-۱}{x^۲+b} \longrightarrow yx^۲+by=ax^۲-۱ \Rightarrow x^۲(y-a)=-(yb+۱)$

$\Rightarrow x^۲=\frac{۱+by}{a-y} \longrightarrow \frac{۱}{a}=\frac{b}{-۱} \Rightarrow ab=-۱$

$y\neq a \Rightarrow \underline{a=۱}$ $\longrightarrow \underline{b=-۱}$

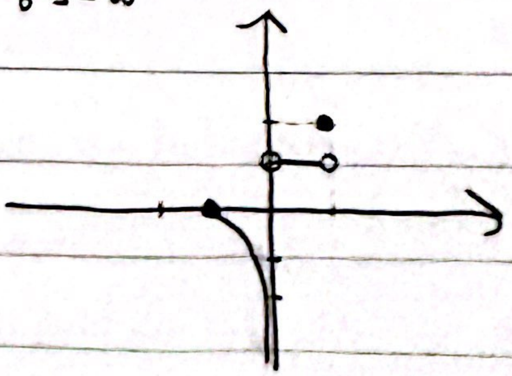
$a+b=۱-۱=\boxed{۰}$

سوال ۵) $y=\frac{[x]}{x}+\frac{|x|}{x}$ $[-۱,۱]$

$-۱\leq x<۰ \longrightarrow [x]=-۱ \longrightarrow \frac{-۱}{x}-۱=y$ $-۱ \to ۰$, $۰ \to -\infty$

$۰\leq x<۱ \longrightarrow [x]=۰ \longrightarrow y=۱$

$x=۱ \longrightarrow y=۲$



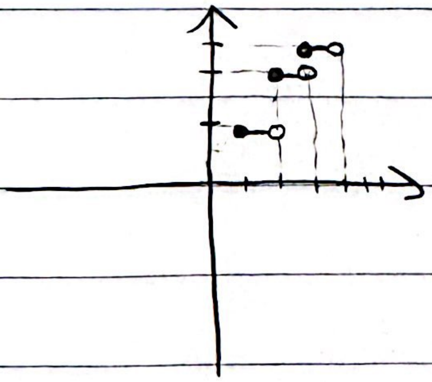
سوال ۲۶)

$[x]+[x+\frac{۱}{۲}] \quad [\frac{۱}{۲},۲)$

$\frac{۱}{۲}\leq x<۱ \longrightarrow ۱\leq x+\frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۲} \longrightarrow [x]=۰ \,,\; [x+\frac{۱}{۲}]=۱ \Rightarrow y=۱$

$۱\leq x<\frac{۳}{۲} \longrightarrow \frac{۳}{۲}\leq x+\frac{۱}{۲}<۲ \longrightarrow [x]=۱ \,,\; [x+\frac{۱}{۲}]=۱ \Rightarrow y=۲$

$\frac{۳}{۲}\leq x<۲ \longrightarrow ۲\leq x+\frac{۱}{۲}<\frac{۵}{۲} \longrightarrow [x]=۱ \,,\; [x+\frac{۱}{۲}]=۲ \Rightarrow y=۳$



۳ عدد پاره خط داریم

سوال ۲۷)

$y=\left|\frac{x+۱}{ax+۳}\right| \quad (b,+\infty) \quad a-b=?$

$y<۱ \to \left|\frac{x+۱}{ax+۳}\right|<۱ \Rightarrow \frac{(x+۱)^۲}{(ax+۳)^۲}<۱$

$\Rightarrow (x+۱)^۲<(ax+۳)^۲ \Rightarrow \underline{x^۲}+۲x+۱<\underline{a^۲x^۲}+۶ax+۹$

$(b,+\infty) \longrightarrow a^۲=۱ \Rightarrow \underline{a=۱} \Rightarrow (x+۱)^۲<(x+۳)^۲ \Rightarrow \cancel{x^۲}+۲x+۱<\cancel{x^۲}+۶x+۹$

$\Rightarrow x>-۲ \Rightarrow D_f=(-۲,+\infty)$ ✓

$a=-۱ \Rightarrow (x+۱)^۲<(-x+۳)^۲ \Rightarrow \cancel{x^۲}+۲x+۱<\cancel{x^۲}-۶x+۹$

$\Rightarrow x<۱ \Rightarrow (-\infty,۱)$
غ ق

$\Rightarrow \underline{a=۱} \,,\; \underline{b=-۲} \longrightarrow a-b=۱+۲=\boxed{۳}$

سوال ۸)

$|x-۲| + |y-۱| = ۳$

$\downarrow x=۲ \qquad \downarrow y=۱$

$x>۲ , y>۱ \Rightarrow x-۲+y-۱=۳ \rightarrow y=۶-x$

$\rightarrow ۲x=۴ \rightarrow x=۲ , y=۴$

$x<۲ , y>۱ \Rightarrow -x+۲+y-۱=۳ \rightarrow y=x+۲$

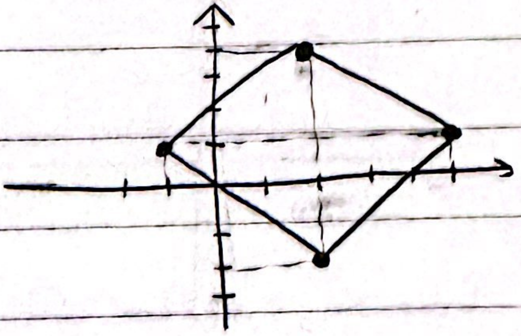
$\rightarrow ۲x=-۲ \rightarrow x=-۱ , y=۱$

$x<۲ , y<۱ \Rightarrow -x+۲-y+۱=۳ \rightarrow y=-x$

$\rightarrow ۲x=۴ \rightarrow x=۲ , y=-۲$

$x>۲ , y<۱ \Rightarrow x-۲-y+۱=۳ \rightarrow y=x-۴$

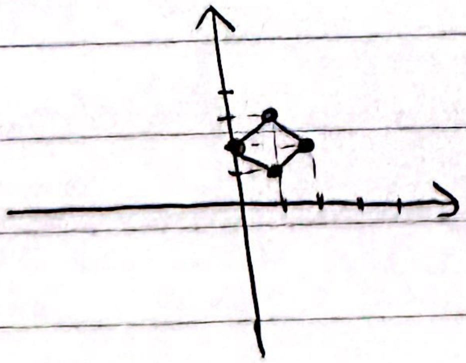
اول و آخر $\rightarrow ۲x=۱۰ \rightarrow x=۵ , y=۱$



سوال ۹)

الف) $|x-۱| + |y-۲| = ۱ \qquad x=۱ \rightarrow (۱,۱)$ و $(۱,۳)$

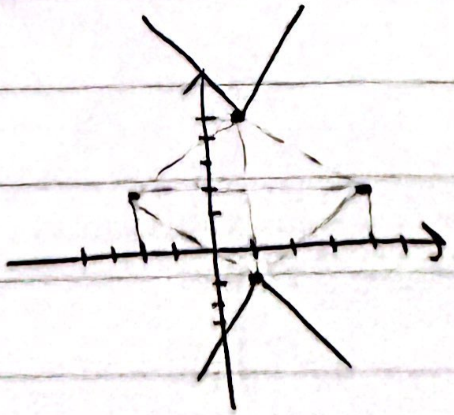
$\downarrow ۱ \qquad \downarrow ۲ \qquad y=۲ \rightarrow (۲,۲)$ و $(۰,۲)$



ب) $|x-۱| - |y-۲| = -۳$

$\rightarrow |y-۲| - |x-۱| = ۳$

$۲ \qquad ۱$

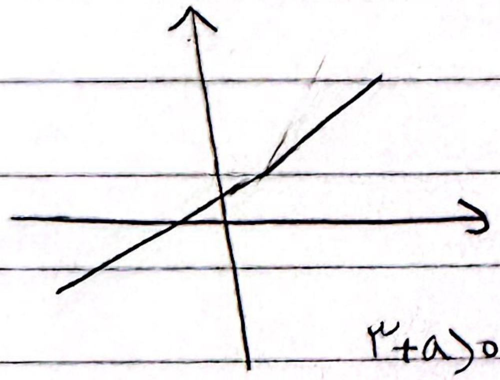


سوال ۱۰)

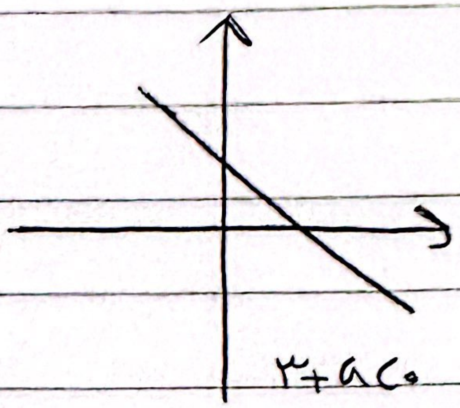
$y = ۳x + |ax+b| \qquad R_f = \mathbb{R}$

$\to y = (a+۳)x + b$

$\to y = (۳-a)x - b$



یا



$۳+a>۰$

$۳+a<۰$

$\Rightarrow a>-۳ \;,\; ۳-a>۰ \Rightarrow a<۳$

$\Rightarrow -۳<a<۳ \Rightarrow \boxed{a \in (-۳,۳)}$

$\Rightarrow a<-۳ \;,\; ۳-a<۰ \Rightarrow a>۳$

$\cap \Rightarrow \varnothing$