Subject: ریاضی ۱۸

۱) دامنه‌ی تابع $gof(x)$ در توابع $f(x)=\sqrt{\log_2^{(x-1)}}$, $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-4}$ است را بدست آورید.

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$ $\quad D_f:\ \log_2^{x-1}\geq 0 \rightarrow x-1\geq 1$

$\rightarrow \boxed{x\geq 2}\ (I)$

$x-1>0 \rightarrow \boxed{x>1}\ (II)$

۱٫۵

$D_f=(I)\cap(II)=[2,+\infty)$

$D_g:\ -x^2+4x-4\geq 0 \rightarrow -(x-2)^2\geq 0 \rightarrow x=2 \rightarrow D_g=\{2\} \rightarrow f(x)=2$

$-x^2+4x-4=2 \rightarrow \Delta<0 \rightarrow$ پس به ازای هیچ x $\rightarrow D_{gof}=\emptyset$

gof قابل تعریف نیست

$D_{gof}=\{11\}$

۲) اگر توابع $f(x)=2x-5$ و $g(x)=x^2-3x+8$ مفروض باشند، مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $fog(x)=gof(x)$ را بدست آورید.

$fog=gof \rightarrow 2(x^2-3x+8)-5=(2x-5)^2-3(2x-5)+8$

$\rightarrow 2x^2-20x+37=0 \rightarrow x_1^2+x_2^2=S^2-2P \xrightarrow[P=\frac{37}{2}]{S=10} \boxed{x_1^2+x_2^2=63}$

۲

۳) اگر $gof(x)=5x^2+11$ و $f(x)=2x$ باشد کمترین مقدار $g(x-7)$ را بدست آورید.

$g(2x)=5x^2+11 \xrightarrow[x=\frac{t}{2}]{2x=t} g(t)=\frac{5}{4}t^2+11 \rightarrow g(x)=\frac{5}{4}x^2+11$

$g(x-7)=\frac{5}{4}(x-7)^2+11 \rightarrow \begin{cases} x_{ext}=7 \\ y_{ext}=11 \end{cases} \rightarrow y_{min}=\boxed{11}$

۲

s.a.m

Subject: Date: / /

۴) اگر $f(x)=3x-4$, $fog=3x^2-6x-1$ باشد ضابطه $gof(x)$ را بیابید.

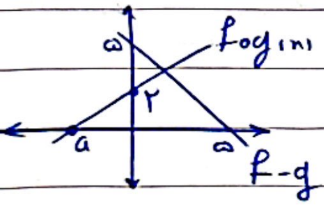
$f(g(x)) = 3g(x)-4 = 3x^2-6x-1 \to g(x) = \frac{3x^2-6x+3}{3} = x^2-2x+1$

$gof(x) = (3x-4)^2-2(3x-4)+1 = 9x^2+16-24x-6x+8+1 =$

$\boxed{9x^2-30x+25}$ ✓ ۲

$\to g(x) = \frac{3}{2}f(x)-7$

۵) نمودار توابع fog , $f-g$ به صورت مقابل هست. اگر $2g(x)-3f(x)=-14$ باشد مقدار a را بیابید.



$f-g = -x+5 \to f(x)-\frac{3}{2}f(x)+7 = -\frac{f(x)}{2}+7 \to f(x)=2x+4$

$\to g(x) = 3x-1$ ۱٫۷۵

$fog(x) = \frac{2}{a}x+2 = 2(3x-1)+4 \to \frac{2}{a}x+2 = 6x+2 \to \frac{2}{a}=6$

$\frac{2}{a}x-2$

$\boxed{\to a = 1/3}$ $a=-\frac{1}{3}$

۶) اگر $f(x)=9^x$, $g(x)=\log_3^x$ باشد تعداد اعضای صحیح مجموعه جواب نامعادله $fog \le gof$ را بیابید.

$fog = 9^{\log_3^x} = x^{\log_3^9} = x^2$

$gof = \log_3^{9^x} = x\log_3^9 = 2x$ ۱٫۷۵

$x^2 \le 2x \to x(x-2)\le 0$

	0		2	
+	⋮	−	⋮	+

$\boxed{\to x\in[0,2]}$ ✓

۳ عدد صحیح

s.a.m

Subject: Date: / /

۷- اگر $f(\frac{x^2-2}{x}) = x^2 + x - 4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$ ضابطه تابع $f(x)$ را بدست آورید.

$x - \frac{2}{x} = t$ $\quad (x-\frac{2}{x})^2 + (x-\frac{2}{x})$

$f(t) = t^2 + t$

$\boxed{f(x) = x^2 + x}$

۲

۸- دو تابع $f(x) = \log_2^x$, $g(x) = 8x - x^2$ را در نظر بگیرید. اگر مجموعه جواب A و B به ترتیب دامنه و برد تابع fog باشند، مجموعه $A \cap B$ دارای چند عضو صحیح هست؟

$fog = \log_2^{8x-x^2}$ $\qquad D_{fog} = 8x - x^2 > 0 \to x(8-x) > 0$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} 0 & & 8 \\ - & + & - \end{array}$

$\to D_{fog} = (0, 8) = A$ $\quad$ ۲

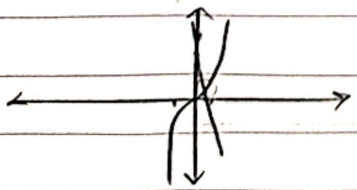
$g(x) = 8x - x^2 \to \{x_{ent} = 4,\ y_{ent} = 16\} \to 8x - x^2 \le 16 \to \log_2^{8x-x^2} \le 4$

$R_{fog} = (-\infty, 4] = B$ $\qquad A \cap B = (0, 4] \to 4, 3, 2, 1 \to$ $\boxed{\text{۴ عضو}}$

۹- اگر $f \circ f = 1 - 3f^2(x)$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = x^3 + 3x + 1$ و تعداد ریشه‌های معادله $h(g(x)) = f(x)$ را بدست آورید.

$f(\underbrace{f(x)}_{=t}) = 1 - 3f(x)f(x) \to f(t) = 1 - 3t^2 \to f(x) = 1 - 3x^2$

$hog = f(x) \to (x-1)^3 + 2(x-1) + 1 = 1 - 3x^2 \to x^3 = 3 - 5x$



$\to$ ۱ برخورد $\to$ $\boxed{\text{۱ ریشه دارد}}$

۲

Subject: Date: / /

10- اگر $f(x)=x-\frac{4}{x}$, $gof = ax^3 + 2x$, $g(3) = 8$ باشد مقدار a را بدست آورید.

$g(x-\frac{4}{x}) = ax^3+2x \longrightarrow x-\frac{4}{x} = 3 \xrightarrow{\times x} x^2-4=3x \rightarrow$

$x^2-3x-4=0 \longrightarrow (x-4)(x+1)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases}$ ✓

1

$$\begin{cases} x=4 \longrightarrow 64a+8=8 \longrightarrow a=0 \\ x=-1 \longrightarrow -a-2=8 \longrightarrow a=-10 \end{cases}$$