مهشاد مقاله‌عابد - دوازدهم دختر A - تکلیف شماره ۸

۱

$f(x)=\sqrt{\log_2^{x-1}}$, $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-4}$

$D_f: \begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ \log_2^{x-1} \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \geq 2$

$D_{gof}=\{x \in D_f \; ; \; f(x) \in D_g\}$

$D_g: -x^2+4x-4 \geq 0 \Rightarrow x=2$

$x \in [2,+\infty) \cap \sqrt{\log_2^{x-1}}=2$

$\Rightarrow \log_2^{x-1}=4 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$ $\Rightarrow D_{gof}=\{3\}$

۲

$f(x)=2x-5$, $g(x)=x^2-3x+8$

$fog(x)=2(x^2-3x+8)-5=2x^2-6x+11$

$gof(x)=(2x-5)^2-3(2x-5)+8=4x^2-20x+25-6x+15+8=4x^2-26x+48$

$fog(x)=gof(x) \Rightarrow 2x^2-6x+11=4x^2-26x+48 \Rightarrow 2x^2-20x+37=0$

$S=-\frac{b}{a}=\frac{20}{2}=10$, $P=\frac{37}{2}$

$\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{\text{مجموع مربعات}}=S^2-2P=100-37=\boxed{63}$

۳

$gof(x)=5x^2+11$, $f(x)=2x$

$\Rightarrow g(f(x))=5x^2+11 \xrightarrow{f(x)=2x} g(2x)=5x^2+11 \xrightarrow{x=\frac{x}{2}} g(x)=5\left(\frac{x}{2}\right)^2+11=\frac{5}{4}x^2+11$

$g(x)=\frac{5}{4}x^2+11 \Rightarrow Min/11 \Rightarrow$ کمترین مقدار

همان تابع $y=x^2$ که فاصله شاخه‌ها تغییر کرده و 11 واحد بالا رفته

- کمترین مقدار $g(x-7)$ همان y_s در نقطه‌ی مینیمم تابع g می باشد.

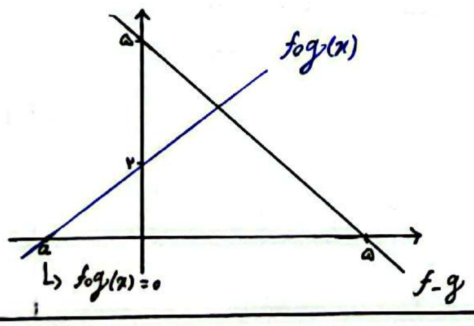
۴

$f(x)=3x-4$, $fog(x)=3x^2-6x-1 \Rightarrow f(g(x))=3x^2-6x-1$

$\Rightarrow 3g(x)-4=3x^2-6x-1 \Rightarrow g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

$gof(x)=g(f(x))=(3x-4-1)^2=(3x-5)^2=\boxed{9x^2-30x+25}$

۵



$2g(x)=3f(x)-14 \Rightarrow g(x)=\frac{3}{2}f(x)-7$

$\underbrace{f(x)-g(x)}_{\text{با توجه به نمودار داده شده:}}=f(x)-\frac{3}{2}f(x)+7=-\frac{1}{2}f(x)+7$

$-x+5=-\frac{1}{2}f(x)+7 \Rightarrow f(x)=2x+4$, $g(x)=3x-1$

$fog(x)=2(3x-1)+4=6x+2 \xrightarrow{x=a} 6a+2=0$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

$f(x) = 9^x \quad , \quad g(x) = \log_3 x \quad \to \quad fog(x) \le gof(x)$

$fog(x) = 9^{\log_3 x} = x^2$

$gof(x) = \log_3 9^x = 2x \quad \to \quad 9^{\log_3 x} \le \log_3 9^x \Rightarrow x^2 \le 2x \Rightarrow x^2 - 2x \le 0 \quad x(x-2) \le 0$ ۶

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

$\Rightarrow x \in [0, 2] \longrightarrow$ $\log_3 x$ به دلیل دامنه $x = 0$ غیرقابل قبول! $\Rightarrow (0, 2] \xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} 1, 2 \to$ ۲ عدد

$f\left(\frac{x^2-2}{x}\right) = x^2 + x - 4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \Rightarrow f\left(x - \frac{2}{x}\right) = \underbrace{x^2 - 4 + \frac{4}{x^2}}_{\left(x - \frac{2}{x}\right)^2} + x - \frac{2}{x} \Rightarrow f(x) = x^2 + x$

۷

$f(x) = \log_2 x \qquad g(x) = 8x - x^2 \qquad D_f: x > 0 \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$

$A = D_{fog} = \{ x \in D_g \,;\, g(x) \in D_f \} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \cap (0, 8) \Rightarrow x \in (0, 8) = A$

$-x^2 + 8x > 0 \Rightarrow x \in (0, 8)$ ۸

$\to A \cap B = (0, 4]$

$B = R_{fog} \to fog(x) = \log_2^{-x^2+8x} \to (-\infty, 16] \Rightarrow R_{fog} = B = (-\infty, 4]$ ($\log_2 16$)

اعداد صحیح: $\underbrace{1, 2, 3, 4}_{\text{۴ عدد}}$

$f(f(x)) = 1 - 3f^2(x) \Rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$

$g(x) = x - 1$

$h(x) = x^3 + 2x + 1$

$h(g(x)) = (x-1)^3 + 2(x-1) + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x - 2 + 1 = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ ۹

$h(g(x)) = f(x) \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = -3x^2 + 1 \Rightarrow x^3 + 5x - 3 = 0 \to$ با توجه به آنکه ضریب x^3 مثبت است => در $x \to +\infty$ تابع نیز $+\infty$ و در $x \to -\infty$ تابع $-\infty$ => پیوسته و با توجه به آنکه مشتق $(3x^2+5)$ همواره مثبت و فاقد ریشه است معادله دارای یک ریشه می‌باشد.

$f(x) = x - \frac{4}{x} \quad , \quad gof(x) = ax^3 + 2x \quad , \quad g(3) = 8$

$g(f(x)) = ax^3 + 2x \Rightarrow g\left(x - \frac{4}{x}\right) = ax^3 + 2x \xrightarrow{x=-1} g(3) = -a - 2 \xrightarrow{g(3)=8} -a - 2 = 8$

$\Rightarrow \boxed{a = -10}$

۱۰