Subject ۸ : تمرینات Date دوازدهم دختر A ۱۹,۵ روشنا ایوبی

۱) $D_{gof} = \{x \in D_f \cap f(x) \in D_g\}$

$f(x) = \sqrt{\log_2^{x-1}} \Rightarrow x-1>1 \Rightarrow x>2$ ①, $\log_2^{x-1} \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 2$ ②

$① \cap ② \longrightarrow D_f = (2, +\infty)$ (A)

$g(x) = \sqrt{-x^2+4x-4} \Rightarrow -x^2+4x-4 \geq 0 \Rightarrow x^2-4x+4 \leq 0 \Rightarrow (x-2)^2 \leq 0$

همواره مثبت است مگر اینکه $x=2$ در آن جایگذاری شود که صفر می‌شود

۲

$\Rightarrow D_g = \{2\} \Rightarrow \sqrt{\log_2^{x-1}} = 2 \Rightarrow \log_2^{x-1} = 4 \Rightarrow x-1 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = 17$ (B)

$(A) \cap (B) \longrightarrow D_{gof} = (2, +\infty) \cap \{17\} = \boxed{\{17\}}$

۲) $fog(x) = 2(x^2-3x+8)-5 = 2x^2-6x+16-5 = 2x^2-6x+11$

$gof(x) = (2x-5)^2 - 3(2x-5) + 8 = 4x^2-20x+25-6x+15+8$

$\Rightarrow gof(x) = 4x^2-26x+48 \Rightarrow fog(x) = gof(x) \Rightarrow 2x^2-6x+11 = 4x^2-26x+48$

۲

$\Rightarrow 2x^2-20x+37 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{104}}{4}$ $(\Delta = b^2-4ac)$

$\Rightarrow x = \frac{20 \pm 2\sqrt{26}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{26}}{2}$ ← جمع مربعات ریشه‌ها: $\frac{(10+\sqrt{26})^2}{4} + \frac{(10-\sqrt{26})^2}{4}$

$= \frac{100+26+20\sqrt{26}+100+26-20\sqrt{26}}{4} = \frac{252}{4} = \boxed{63}$

۳) $gof(x) = 5x^2+11 \quad f(x) = 2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$

$\Rightarrow g(t) = 5\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 11 = \frac{5t^2}{4} + 11 \Rightarrow g(x) = \frac{5x^2}{4} + 11 \Rightarrow g(x-7) = \frac{5(x-7)^2}{4} + 11$

$\Rightarrow g(x-7) = \frac{5x^2-70x+245}{4} + 11 \rightarrow$ Δ معادله‌ی درجه ۲ که در صورت قرار دارد صفر است

⇐ $b^2-4ac = 0$, $a>0$ ⇐ تابعی min دار است ⇐ دامنه‌ی آن $[0, +\infty)$ است ⇐ کمترین

مقدار آن صفر است ⇐ $\min(g(x-7)) = \frac{0}{4} + 11 = \boxed{11}$

← کمترین مقدار $g(x-7)$

۲

Subject ______ Date ______ روشنا الیوسی

۴)

$f\circ g(x)=3x^2-6x-1 \qquad f(x)=3x-4$

$\Rightarrow f(g(x))=3g-4 \Rightarrow 3g-4=3x^2-6x-1 \Rightarrow 3g=3x^2-6x+3$

$\Rightarrow g=x^2-2x+1=(x-1)^2 \Rightarrow g(x)=(x-1)^2$

$\Rightarrow g\circ f(x)=((3x-4)-1)^2=\boxed{(3x-5)^2=9x^2-30x+25}$

۵)

$\Rightarrow 2f(x)-3g(x)$

$\left.\begin{array}{l} 2(f-g)(x)=-2(x)+5(2) \\ 2g(x)-3f(x)=-14 \end{array}\right\} \Rightarrow -f(x)=-2x-4 \Rightarrow f(x)=2x+4$

$2x+4-g=-x+5 \Rightarrow g(x)=3x-1$

$\Rightarrow f\circ g(x)=2(3x-1)+4 \qquad x=0 \to y=2$

$y=0 \to 2(3x-1)=-4 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}=a \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{3}}$

۶)

$f(x)=9^x=3^{2x} \qquad g(x)=\log_3^x \qquad \Rightarrow f\circ g(x)=3^{2\log_3^x}=3^{\log_3^{x^2}}$

$\Rightarrow g\circ f(x)=\log_3^{3^{2x}}=2x\log_3^3=2x$ یا $f\circ g(x)=(x^2)^{\log_3^3}=x^2$

$\Rightarrow f\circ g(x)\leq g\circ f(x) \Rightarrow x^2\leq 2x \Rightarrow x^2-2x\leq 0 \Rightarrow x(x-2)\leq 0$

$0 \qquad 2$

$\Rightarrow \quad + \; 0 \; - \; 2 \; + \quad \Rightarrow x\in(0,2] \to \{1,2\}$

ج

صفر در اینجا وجود ندارد زیرا در دامنه‌ی $g(x)$ وجود ندارد.

$\boxed{\text{شامل ۲ عدد صحیح است}}$

۷)

$f\left(\frac{x^2-2}{x}\right)=x^2+x-4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=x^2-4+\frac{4}{x^2}+x-\frac{2}{x}$

$\Rightarrow f\left(x-\frac{2}{x}\right)=x^2-4+\frac{4}{x^2}+x-\frac{2}{x}=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+\left(x-\frac{2}{x}\right)$

$\Rightarrow f(x)=x^2+x$

$\Rightarrow \boxed{f(x)=x^2+x}$

Subject ______ Date ______ روشنا ایوبی

(8)

$f(x)=\log_2 x \;,\; g(x)=8x-x^2 \Rightarrow f(g(x))=\log_2 (-x^2+8x)$

$D_g=\mathbb{R} \;,\; D_f=(0,+\infty) \Rightarrow 8x-x^2>0 \Rightarrow x^2-8x<0 \rightarrow \begin{array}{ccccc} & 0 & & 8 & \\ + & & - & & + \end{array}$

$D_{fog}=\{x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}=(0,8)=A$ $\quad x\in(0,8)$ یا ج

$R_{fog} \Rightarrow \log_2 (-x^2+8x) \rightarrow S \left| \begin{array}{l} x_{max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-8}{-2}=4 \\ y_s=-16+32=16 \end{array} \right. \Rightarrow \log_2 16=4$

$\Rightarrow R_{fog}=(-\infty,4]=B \Rightarrow A\cap B=(0,4] \Rightarrow \{1,2,3,4\}$

$\boxed{\text{دارای } \cancel{3} \text{ عضو صحیح است.}}$

۴ عضو صحیح

1.5

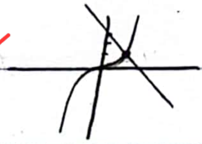
(9)

$fof(x)=f(f(x))=1-3f^2(x) \Rightarrow f(x)=1-3x^2$

$h(x)=x^3+2x+1 \;,\; g(x)=x-1 \Rightarrow h(g(x))=(x-1)^3+2(x-1)+1$

$\Rightarrow h(g(x))=x^3-3x^2+3x-1+2x-2+1=x^3-3x^2+5x-2$

$\Rightarrow h(g(x))=f(x) \Rightarrow x^3-3x^2+5x-2=-3x^2+1 \Rightarrow x^3+5x-3=0$

$\Rightarrow x^3=-5x+3 \rightarrow$  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{۱ نقطه برخورد ← این معادله یک جواب دارد}}$

2

(10)

$f(x)=x-\frac{4}{x} \;,\; gof(x)=ax^3+2x \;,\; g(3)=8$

$g(3)=8 \Rightarrow f(x)=3 \Rightarrow x-\frac{4}{x}=\frac{x^2-4}{x}=3 \Rightarrow x^2-3x-4=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-4)=0 \Rightarrow x=-1 , 4$

$\Rightarrow g(f(-1))=g(3)=a(-1)^3+2(-1)=-a-2=8 \Rightarrow a=-10$

$g(f(4))=g(3)=64a+8=8 \Rightarrow a=0$ ✗ غیرقابل قبول زیرا f تابع خطی

نیست ← $gof(x)$ هم نمی‌تواند خطی باشد اما اگر $a=0$ باشد، $gof(x)$ خطی می‌شود.

$\Rightarrow x=-1$ ق ق $\Rightarrow x=4$ غ ق ق $\Rightarrow \boxed{a=-10}$

2