کیمیا یحیی آثاری

۲۰

①

$g(x) = \sqrt{-x^۲+۴x-۴} = \sqrt{-(x-۲)^۲}$

$f(x) = \sqrt{\log_۲^{x-۱}}$

$g(f(x)) = \sqrt{-(\sqrt{\log_۲^{x-۱}}-۲)^۲}$

$D_f \to x-۱>۰ \to x>۱$

$\hookrightarrow \log_۲^{x-۱} \geq ۰ \to x-۱ \geq ۱ \to x \geq ۲$

$D_f = [۲,+\infty)$

$D_g \to -(x-۲)^۲ \geq ۰ \to x=۲ \to D_g = \{۲\} \to \sqrt{\log_۲^{x-۱}} = ۲ \to \log_۲^{x-۱} = ۴$

$x-۱ = ۱۶ \to x = ۱۷$

$D_{gof} = \{۱۷\}$ ✓

۲

②

$g(x) = x^۲ - ۳x + ۸$

$f(x) = ۲x - ۵$

$g(f(x)) = \underbrace{(۲x-۵)^۲}_{۴x^۲-۲۰x+۲۵} - \overbrace{۳(۲x-۵)}^{-۶x+۱۵} + ۸ = ۴x^۲ - ۲۶x + ۴۸$

$f(g(x)) = ۲(x^۲-۳x+۸) - ۵ = ۲x^۲ - ۶x + ۱۱$

$۴x^۲ - ۲۶x + ۴۸ = ۲x^۲ - ۶x + ۱۱ \to ۲x^۲ - ۲۰x + ۳۷ = ۰$

$\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P = (\frac{۲۰}{۲})^۲ - ۲(\frac{۳۷}{۲}) = ۱۰۰ - ۳۷ = ۶۳$ ✓

۲

③

$gof(x) = ۵x^۲ + ۱۱ \to g(\underbrace{f(x)}_{t}) = ۵x^۲ + ۱۱$

$f(x) = ۲x$

$۲x = t \to x = \frac{t}{۲}$

$۵(\frac{t}{۲})^۲ + ۱۱ = \frac{۵t^۲}{۴} + ۱۱$

$g(x) = \frac{۵x^۲}{۴} + ۱۱$

کمترین مقدار $\to$ $\underbrace{g(x-۷)}$

از آنجایی که تغییر روی دامنه در برد تاثیری نمی‌گذارد کافی است کمترین مقدار $g(x)$ را پیدا کنیم

$\min g(x)$ | $\frac{-b}{۲a} = ۰$

$۰ + ۱۱ = ۱۱$ ✓

کمترین مقدار $g(x-۷)$

۲

④

$f(x) = ۳x - ۴$

$fog(x) = ۳x^۲ - ۶x - ۱$

$f(g(x)) = ۳x^۲ - ۶x - ۱ = ۳g(x) - ۴ \to ۳x^۲ - ۶x + ۳ = ۳g(x)$

$g(x) = x^۲ - ۲x + ۱ = (x-۱)^۲$

$g(f(x)) = (۳x \underbrace{- \cancel{۴} - ۱}_{-۵})^۲ = ۹x^۲ - ۳۰x + ۲۵$ ✓

۲

5

راه ۲
$$\begin{cases} fog(x) = 2(3x-1)+4 \\ x=0 \to y=2 \checkmark \\ y=0 \to x \Rightarrow 2(3x-1) = \cancel{-4}\ -2 \end{cases}$$

$$x = \boxed{-\frac{1}{3} = a}$$

راه ۱
$$\begin{cases} \cancel{2f(x)-2g(x)} \\ 2(f-g)(x) = -2x + 5\times 2 \\ 2g(x) - 3f(x) = -14 \\ -f(x) = -2x-4 \to f(x) = 2x+4 \\ 2x+4-g = -x+4 \to g(x) = 3x-1 \end{cases}$$

2

6

$f(x) = 9^x$

$g(x) = \log_3 x$

$fog(x) \leq gof(x)$

$\cancel{9^{\log_3 x}} \leq \log_3 9^x \quad (9^x = 3^{2x})$

$\cancel{x^{\log_3 9}}$

$\to x^2 \leq 2x$

بخاطر دامنه‌ی g نمی‌تواند باشد

$x(x-2) \leq 0$

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 2 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$$

مجموعه جواب $= (0,2]$ → ۲ عدد صحیح

2

7

$$f\left(\frac{x^2-2}{x}\right) = x^2+x-4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2} \to f(x) = x^2+x$$

$$\underbrace{x-\frac{2}{x}}_{t} \qquad \underbrace{x^2-4+\frac{4}{x^2}}_{t^2} + \underbrace{x-\frac{2}{x}}_{t}$$

2

8

$f(x) = \log_2 x$

$g(x) = 8x - x^2$

$f(g(x)) = \log_2 (-x^2+8x)$

$D_g = R \quad D_f = (0,+\infty)$

$8x - x^2 > 0 \to x^2 - 8x < 0$

$x(x-8) < 0$

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 8 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$$

$\to D_{fog} = (0,8) = A$

$\to R_{fog} \to \log_2 (-x^2+8x) \to$ max برای $-x^2+8x$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-2} = 4$

$-16+32 = 16$

$\to \log_2 16 = 4$

$(-\infty, 4] = R_{fog} = B$

$A \cap B = (0,4] \to \underbrace{1,2,3,4}_{\text{۴ عضو}}$

2

۹

$fof(x) = 1 - 3f^2(x)$ $\quad f(\underbrace{f(x)}_{t}) = 1 - 3f^2(x)$, $\quad 1 - 3t^2 \rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$

$g(x) = x - 1$

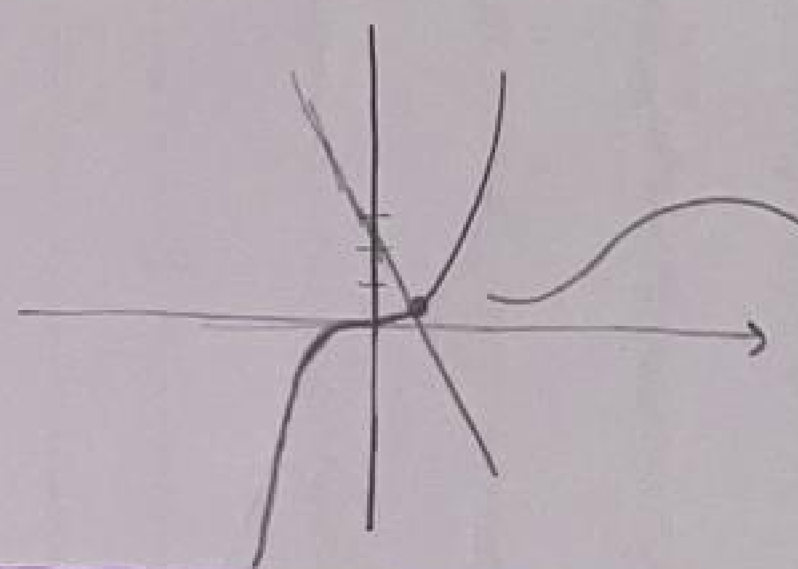
$h(x) = x^3 + 2x + 1$

$h(g(x)) = f(x) \rightarrow (x-1)^3 + \overset{2x-2}{2(x-1)} + \cancel{1} = \cancel{1} - \cancel{3x^2}$

$x^3 - 1 + 3(x-1)(-x) \rightarrow x^3 - \cancel{3x^2} + 3x - 1$

$(-x^2 + x)$

$\rightarrow x^3 + 5x - 3 = 0 \rightarrow x^3 = -5x + 3$



این معادله $\boxed{1}$ جواب دارد.

۲

$f(x) = x - \frac{4}{x}$ $\qquad g(3) = 8$ ۱۰

$gof_{(x)} = ax^3 + 2x \rightarrow g(\underbrace{f(x)}_{3}) = \underbrace{ax^3 + 2x}_{8}$

$f(x) = 3 = x - \frac{4}{x} \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0 \quad x = 4$ و -1

$x = 4 \rightarrow a4^3 + 2 \times 4 = 8 \rightarrow a = 0$

$x = -1 \rightarrow -a + 2(-1) = 8 \rightarrow a = -10$

۲