کیمیا یحیی آبادی

1

$g(x) = \sqrt{-x^2+4x-4}$, $-(x-2)^2$

$f(x) = \sqrt{\log_2^{x-1}}$

$g(f(x)) = \sqrt{-(\sqrt{\log_2^{x-1}}-2)^2}$

$D_f \to x-1>0 \to x>1$

$\hookrightarrow \log_2^{x-1} \geq 0 \to x-1 \geq 1$

$x \geq 2$

$D_f = [2, +\infty)$

$D_g \to -(x-2)^2 \geq 0 \to x=2 \to D_g = \{2\} \to \sqrt{\log_2^{x-1}} = 2 \to \log_2^{x-1} = 4$

$x-1 = 16 \to x = 17$

$D_{gof} = \{17\}$

2

$g(x) = x^2-3x+8$

$f(x) = 2x-5$

$g(f(x)) = \underbrace{(2x-5)^2}_{4x^2-20x+25} - \overbrace{3(2x-5)}^{-6x+15} + 8 = 4x^2-26x+48$

$f(g(x)) = 2(x^2-3x+8)-5 = 2x^2-6x+11$

$4x^2-26x+48 = 2x^2-6x+11 \to 2x^2-20x+37=0$

$\alpha^2+\beta^2 = S^2-2P = (\cancel{\frac{20}{2}}_{10})^2 - \cancel{2}(\frac{37}{\cancel{2}}) = 100-37 = 43$

3

$gof(x) = 5x^2+11 \to g(\underbrace{f(x)}_{t}) = 5x^2+11$

$f(x) = 2x$

$2x = t \to x = \frac{t}{2}$

$5(\frac{t}{2})^2+11 = \frac{5t^2}{4}+11$

$g(x) = \frac{5x^2}{4}+11 \xrightarrow{\text{کمترین مقدار}} g(x-7)$

از آنجایی که تغییر روی دامنه در برد تاثیری نمی گذارد کافی است کمترین مقدار $g(x)$ را پیدا کنیم

$\min g(x)$ | $\frac{-b}{2a} = 0$

$0+11 = 11$

کمترین مقدار $g(x-7)$

4

$f(x) = 3x-4$

$fog(x) = 3x^2-6x-1$

$f(g(x)) = 3x^2-6x-1 = 3g(x)-4 \to 3x^2-6x+3 = 3g(x)$

$g(x) = x^2-2x+1$

$(x-1)^2$

$g(f(x)) = (3x-\underbrace{\cancel{4}-1}_{-5})^2 = 9x^2-30x+25$

۵

راه ۲: $\begin{cases} fog(x) = 2(3x-1)+4 \\ x=0 \to y=2 \checkmark \\ y=0 \to x \Rightarrow 2(3x-1) = \cancel{-4} - 2 \\ x = \boxed{-\frac{1}{3} = a} \end{cases}$

راه ۱: $\begin{cases} 2f(x)-2g(x) \\ 2(f-g)(x) = -2x + 5\times 2 \\ \cancel{2g(x)} - 3f(x) = -14 \\ -f(x) = -2x-4 \to f(x) = 2x+4 \\ 2x+4-g = -x+4 \longrightarrow g(x) = 3x-1 \end{cases}$

۶

$f(x) = 9^x$

$g(x) = \log_3 x$

$fog(x) \leq gof(x)$

$\cancel{9^{\log_3 x}} \leq \log_3 9^x \; 3^{2x} \to x^2 \leq 2x$

$x^{\log_3 9}$

بخاطر دامنه‌ی g نمی‌تواند باشد

$x(x-2) \leq 0$ $\quad \begin{array}{ccccc} & 0 & & 2 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$

$(0,2]$ = مجموعه جواب → ۲ عدد صحیح

۷

$f\left(\frac{x^2-2}{x}\right) = x^2+x-4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2} \to f(x) = x^2+x$

$\underbrace{x-\frac{2}{x}}_{t} \qquad \underbrace{x^2-4+\frac{4}{x^2}}_{t^2} + \underbrace{x-\frac{2}{x}}_{t}$

۸

$f(x) = \log_2 x$

$g(x) = 8x - x^2$

$f(g(x)) = \log_2(-x^2+8x)$

$D_g = R \quad D_f = (0,+\infty)$

$8x - x^2 > 0 \to x^2 - 8x < 0$ $\quad \begin{array}{ccccc} & 0 & & 8 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$

$x(x-8) < 0$

$\to D_{fog} = (0,8) = A$

$\to R_{fog} \to \log_2(-x^2+8x) \xrightarrow{max}$ $\left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-2} = 4 \\ -16+32 = 16 \end{array} \right. \to \log_2 16 = 4$

برای $-x^2+8x$

$(-\infty,4] = R_{fog} = B \qquad A \cap B = (0,4] \to \underbrace{1,2,3,4}_{\text{۴ عضو}}$

۹

$fof(x) = 1 - ۳f^{۲}(x) \qquad f(\underbrace{f(x)}_{t}) = 1 - ۳f^{۲}(x) \quad 1 - ۳t^{۲} \quad \rightarrow f(x) = 1 - ۳x^{۲}$

$g(x) = x - 1$

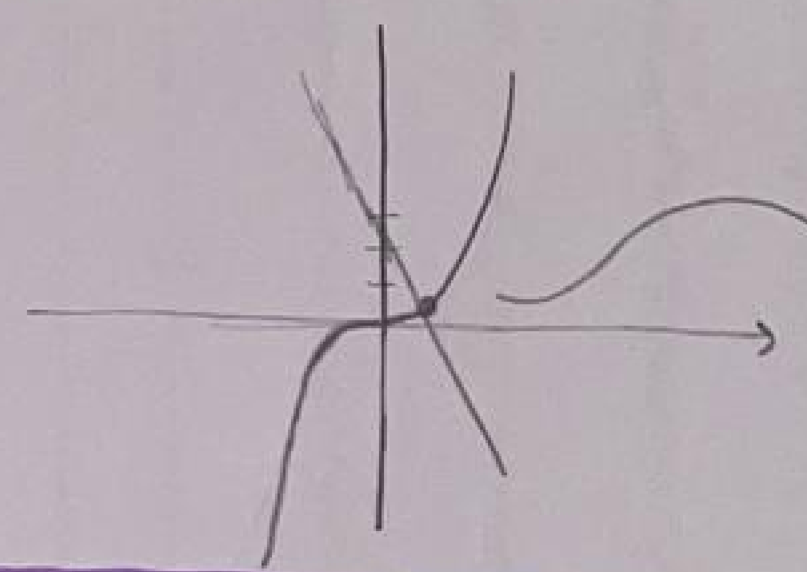
$h(x) = x^{۳} + ۲x + 1$

$h(g(x)) = f(x) \rightarrow (x-1)^{۳} + \overset{۲x-۲}{۲(x-1)} + \cancel{1} = \cancel{1} - ۳x^{۲}$

$x^{۳} - 1 + ۳(x-1)(-x) \rightarrow x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - 1$

$(-x^{۲} + x)$

$\rightarrow x^{۳} + ۵x - ۳ = 0 \rightarrow x^{۳} = -۵x + ۳$



این معادله $\boxed{\overset{۱}{\text{یک}}}$ جواب دارد .

۱۰

$f(x) = x - \frac{۴}{x} \qquad g(۳) = ۸$

$gof_{(x)} = ax^{۳} + ۲x \rightarrow g(\underbrace{f(x)}_{۳}) = \underbrace{ax^{۳} + ۲x}_{۸}$

$f(x) = ۳ = x - \frac{۴}{x} \rightarrow x^{۲} - ۳x - ۴ = 0$

$(x-۴)(x+1) = 0 \quad x = ۴ \text{ و } -1$

$x = ۴ \rightarrow a\,۴^{۳} + \cancel{۲ \times ۴} = \cancel{۸} \rightarrow a = 0$

$x = -1 \rightarrow -a + ۲(-1) = ۸ \rightarrow a = -10$