(A) دوازدهم — سپهر اشرف نیا

۱ـ

$gof = \{x \in D_f \,,\, f(x) \in D_g\}$ $\qquad f(x)=\sqrt{\log_{۲}^{(x-۱)}}$

$g(x)=\sqrt{-x^{۲}+۴x-۴}$

$D_f \to x-۱>۰ \to x>۱ \overset{①}{} \,,\, \log_{۲}^{x-۱} \geq ۰ \to x-۱\geq ۱ \to x\geq ۲ \overset{②}{}$

$D_g \to -x^{۲}+۴x-۴ \geq ۰ \to x^{۲}-۴x+۴ \leq ۰ \to (x-۲)^{۲} \leq ۰ \to x=۲$

$f(x)\in D_g \to \sqrt{\log_{۲}^{x-۱}} = ۲ \to \log_{۲}^{x-۱} = ۴ \to x-۱=۱۶ \to x=۱۷ \;③$

$① \cap ② \cap ③ = x=۱۷$

۲ـ

$f(x)=۲x-۵ \,,\, g(x)=x^{۲}-۳x+۸$

$fog(x)=۲(x^{۲}-۳x+۸)-۵ \to \underline{۲x^{۲}-۶x+۱۱}$

$gof(x)=(۲x-۵)^{۲}-۳(۲x-۵)+۸ \to ۴x^{۲}-۲۰x+۲۵-۶x+۱۵+۸ = \underline{۴x^{۲}-۲۶x+۴۸}$

$fog(x)=gof(x) \to ۲x^{۲}-۶x+۱۱ = ۴x^{۲}-۲۶x+۴۸ \to ۲x^{۲}-۲۰x+۳۷=۰$

$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=? \longrightarrow S^{۲}-۲P \to S=-\frac{b}{a}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰ \,,\, P=\frac{c}{a}=\frac{۳۷}{۲}$

$S^{۲}=۱۰۰ \,,\, ۲P=۳۷ \to ۱۰۰-۳۷=۶۳$

۳ـ

$gof(x)=۵x^{۲}+۱۱ \qquad f(x)=۲x \to ۲x=t \to x=\frac{t}{۲}$

$gof(t)=۵(\frac{t}{۲})^{۲}+۱۱ \to \frac{۵t^{۲}}{۴}+۱۱ \to gof(x)=\frac{۵}{۴}x^{۲}+۱۱$

$g(x-۷) \to \frac{۵}{۴}(x-۷)^{۲}+۱۱ = \frac{۵}{۴}(x^{۲}-۱۴x+۴۹)+۱۱ \to \frac{۵}{۴}x^{۲}-\frac{۳۵}{۲}x+\frac{۲۸۹}{۴} \to$

$\to -\frac{b}{۲a} = \frac{\frac{۳۵}{۲}}{\frac{۵}{۲}} = ۷ \xrightarrow{x=۷} (\frac{۵}{۴}\times۴۹)-(\frac{۳۵}{۲}\times۷)+\frac{۲۸۹}{۴} = \frac{۵\times۴۹-۴۹۰}{۴}$

$\frac{۴۴}{۴}=۱۱$

دوازدهم (A)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　دریا شهرام نیا

۴- $f(x) = 3x - 4$, $fog(x) = 3x^2 - 6x - 1$ 　 $gof(x) = ?$

$3g - 4 = 3x^2 - 6x - 1 \rightarrow 3g = 3x^2 - 6x + 3 \rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 1$

$gof(x) = (3x - 4)^2 - 2(3x - 4) + 1 = 9x^2 - 24x + 16 - 6x + 9 \rightarrow$

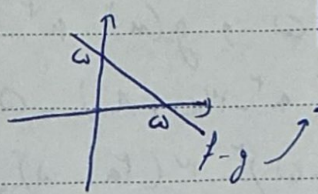
$\rightarrow \boxed{9x^2 - 30x + 25}$

۵- نمودار g و f خطی است پس هر دو تابع خطی اند

$f(x) = ax + b$

$g(x) = cx + d$

$2g(x) = 3f(x) - 14$ 　 $2cx + 2d = 3ax + 3b - 14$ 　 $\begin{cases} 2c = 3a \\ 2d = 3b - 14 \end{cases}$



$-x + 5$

$f - g = (a - c)x + (b - d)$

$f - g = -x + 5$

$\rightarrow a - c = -1 \rightarrow a = c - 1 \xrightarrow{3a = 2c} 3(c - 1) = 2c \rightarrow \boxed{c = 3} , \boxed{a = 2}$

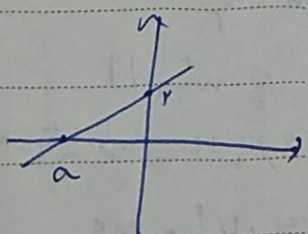
$b - d = 5 \rightarrow b = 5 + d \xrightarrow{2d = 3b - 14} 2d = 3(5 + d) - 14 \rightarrow \boxed{d = -1}$

$\boxed{b = 4}$

$f(x) = 2x + 4 \rightarrow fog(x) = 2(3x - 1) + 4 = 6x + 2$

$g(x) = 3x - 1$

$6x + 2 = 0 \rightarrow x = \boxed{-\frac{1}{3} = a}$



۶ـ $f(x)=9^x \ , \ g(x)=\log_3^x \ , \ fog(x)\le gof(x)$

$fog(x)=9^{\log_3^x} \to x^{\log_3^9} \to x^2$

$gof(x)=\log_3^{9^x} \to x\log_3^9 \to 2x$

$fog(x)\le gof(x) \to x^2\le 2x \to x^2-2x\le 0$ ، $x(x-2)\le 0$

$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 2 & \\ + & & - & & + \end{array}$

$[0,2]$ ← تعداد اعضای صحیح ← ۳

$\{0,1,2\}$

۷ـ $f\left(\frac{x^2-2}{x}\right)=x^2+x-4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2} \qquad f(x)=?$

$f\left(x-\frac{2}{x}\right)=\left(x-\frac{2}{x}\right)+\left(x^2+\frac{4}{x^2}-4\right)$

$x-\frac{2}{x}=t \to f(t)=t+t^2 \to \boxed{f(x)=x^2+x}$

۸ـ $f(x)=\log_2^x \ , \ g(x)=8x-x^2 \qquad A=D_{fog} \ , \ B=R_{fog}$

$A=D_{fog} \to \{x\in D_g \ , \ g(x)\in D_f\} \to D_g=\mathbb{R} \ , \ D_f \to x>0 \to$

$\to g(x)>0 \to 8x-x^2>0 \to x^2-8x<0 \to x(x-8)<0$

$\boxed{A=(0,8)} \leftarrow \begin{array}{ccccc} & 0 & & 8 & \\ + & & - & & + \end{array}$

$B=R_{fog} \to fog(x)=\log_2^{8x-x^2} \longrightarrow 8x-x^2 \ max \ \begin{cases} \frac{-b}{2a}=4 \\ y_{max}=16 \to \end{cases}$

$\to(-\infty,16] \to \log_2^{8x-x^2}$ باید بزرگتر از صفر باشد پس جواب از $(0,16]$ و آن سیر برابر با $(0,16]$ ولی دارد

$(-\infty,4] \to \boxed{B=(-\infty,4]}$

$\boxed{A\cap B \to \{1,2,3,4\}}$ ۴ عضو صحیح دارد ← جواب

$fof(x) = 1 - 3f^2(x) \qquad g(x) = x - 1 \qquad h(x) = x^3 + 2x + 1$ — ۹

$fof(x) = f(f(x)) \rightarrow x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f} 1 - 3f^2(x) \longrightarrow$

$\rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$

$h(g(x)) = (x-1)^3 + 2(x-1) + 1 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x - 2 + 1 \rightarrow$

$g(x) = x - 1$

$\rightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \longrightarrow h(g(x)) = f(x)$

$$\downarrow$$

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 1 - 3x^2$$

$$\downarrow$$

$$x^3 + 5x - 3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x \simeq \frac{56}{100}$$

یک ریشه دارد

$f(x) = x - \frac{4}{x} \qquad gof(x) = ax^3 + 2x \qquad g(3) = 8 \qquad a = ?$ — ۱۰

$x - \frac{4}{x} = 3 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \rightarrow x = 4, x = -1$

$f(x) \xrightarrow{x=4} 3 \rightarrow gof(x) = 8 \rightarrow 64a + 8 = 8 \rightarrow a = 0$

$\xrightarrow{x=-1} 3 \rightarrow gof(x) = 8 \rightarrow -a - 2 = 8 \rightarrow -a = 10 \rightarrow a = 10$