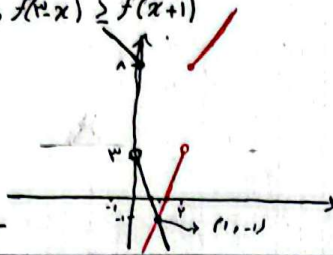


$$y = \sqrt{f(2-x) - f(x+1)}$$

$$f(2-x) - f(x+1) \geq 0 \Rightarrow f(2-x) \geq f(x+1)$$

$$f(2-x) = \begin{cases} 1-3x & ; x \leq 0 \\ 3-4x & ; x > 0 \end{cases}$$

$$Dg = (-\infty, 1] \quad \checkmark$$



$$f(x+2) = \begin{cases} 3x+5 & ; x \geq 1 \\ 4x-1 & ; x < 1 \end{cases} \xrightarrow{x = x-2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \geq 3 \\ 4x-9 & ; x < 3 \end{cases}$$

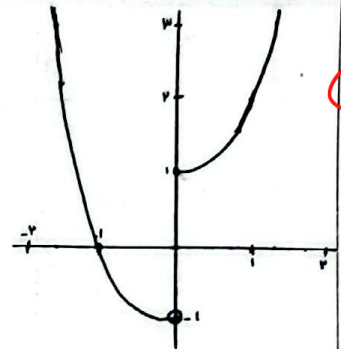
$$f(x+1) = \begin{cases} 3x+2 & ; x \geq 2 \\ 4x-5 & ; x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = (x^3+x)^3 \quad f \circ f < f(x^3) \Rightarrow f(f(x)) < f(x^3) \Rightarrow f((x^3+x)^3) < f(x^3) \quad \text{از هر دو سمت نامعادله}$$

$$\Rightarrow (x^3+x)^3 < x^3 \Rightarrow x^3+x < x \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \quad \checkmark$$

$$y = |x| \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \Rightarrow y = \begin{cases} x^3 + 1 & ; x \geq 0 \\ -x^3 - 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

تابعی غیر یکنوا که در $(-\infty, 0)$ نزولی است
در $(0, +\infty)$ صعودی است



$$f(x) = \frac{2x+1}{|x|-|x+1|} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x-1 & ; x > 0 \\ -1 & ; -1 \leq x \leq 0 \\ 2x+1 & ; x < -1 \end{cases}$$

- با توجه به آنکه سوال بخش صعودی این تابع را می‌خواهد،
ضابطه‌ای که شیب مثبت و یا صفر دارد قابل قبول است.
 $\Leftarrow$ به ازای $x \in (-\infty, 0]$ ، $f(x)$ صعودی است.

$$\checkmark \quad \boxed{a=0} \quad \Leftarrow$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-1) = -\log_2(x^2-2x-1) \quad / \quad D_f: x^2-2x-1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty) \quad \checkmark$$

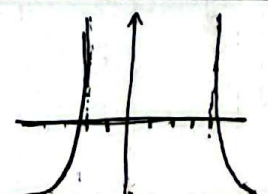
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f = +\infty \Leftarrow +\infty = -\log_2(0^+) \Leftarrow (x-4)(x+2) \rightarrow 0^+ : x \rightarrow -2^- \quad \text{دقیق}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f = +\infty \Leftarrow -\log_2(0^+) = +\infty \Leftarrow (x-4)(x+2) \rightarrow 0^+ : x \rightarrow 4^+ \quad \text{دقیق}$$

$$-\log_2(+\infty) = -\infty \Leftarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2-2x-1) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-2x-1) = +\infty \Leftarrow (x^2-2x-1) \rightarrow +\infty : x \rightarrow \pm\infty \quad \text{منهای ۱ که جهش در اینجا ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty \quad \Leftarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$



با توجه به اطلالات بدست آمده می‌توان تصور کرد که تابع هر چه شکل زیر است:

با توجه به شکل، تابع هر چه بازه $(-\infty, -2)$ و $(4, +\infty)$ است.

$$f(x) = (a^x - 3)^x$$

الف) هنگامی تابع مرکب صعودی است که $a^x - 3$ بزرگتر از یک باشد:

$$a^x - 3 > 1 \Rightarrow a^x - 4 > 0 \Rightarrow \frac{-2}{1} < \frac{x}{1} < \frac{2}{1} \Rightarrow a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

* در این سوال نکته تابع نمایی است
 $a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$$a^x - 3 \geq 1 \Rightarrow a^x - 4 \geq 0 \Rightarrow \frac{-2}{1} < \frac{x}{1} < \frac{2}{1}$$

ب) هنگامی تابع مرکب (نصودی است) است که $a^x - 3$ بزرگتر یا مساوی یک باشد
 $a^x - 3 = 0 \rightarrow a = \pm \sqrt[3]{3}$

با توجه به تعریف یک تابع از تابع نمایی $f(a), a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ می توانیم بگوییم باشد:
 $\Rightarrow a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

سوال نکته تابع نمایی!

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \xrightarrow{\text{نقطه (۳-۱) در (۱) باشد!}} f(x) = (x+3)^3 - 1 = x^3 + 9x^2 + 27x + 26$$

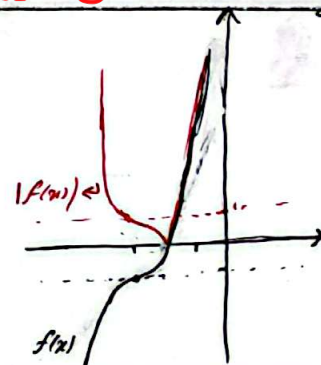
$$(x+3)^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)^3 = 1$$

$$\Rightarrow x = -2 \rightarrow$$

در $(K, +\infty)$ (نصودی است)
 در $(-\infty, -2)$ (نصودی است)

$$\Rightarrow K = -2$$



$$f(x) = x + \sqrt{x} - 2$$

$$f \circ f(x) \leq f(\sqrt{x}) \Rightarrow f(x + \sqrt{x} - 2) \leq f(\sqrt{x})$$

$$D_f = x \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{از سمت راست (۱) می گیریم}} x + \sqrt{x} - 2 \leq \sqrt{x} \Rightarrow x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2 \quad (1)$$

پس

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_f\} \Rightarrow \{x \geq 0 \cap x + \sqrt{x} - 2 \geq 0\} \Rightarrow D_{f \circ f} = [1, +\infty) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) \\ & \downarrow \\ & \sqrt{x}-1=0 \\ & \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \geq 1$$

$(1) \cap (2) = [1, 2]$ پاسخ نهایی
 = تنها شامل دو عدد صحیح است.

$$f(x) = g \circ h = g(h(x))$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} - 2 \quad [1, 8]$$

$$h(x) = 9 \cos^2 x - 1 \rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \xrightarrow{x^2} 0 \leq 9 \cos^2 x \leq 9 \xrightarrow{-1} -1 \leq h(x) \leq 8$$

- با توجه به اینکه $\sqrt[3]{x}$ تابعی صعودی است
 و $(\sqrt[3]{x} - 2)$ نیز تابعی صعودی است

$$g(-1) = -\frac{5}{2}$$

$$g(8) = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow R_{f \circ g} = \left[-\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right] = [a, b] \Rightarrow b - a = \frac{15}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{20}{2} = 10$$

و چون g از جابجایی صعودی است
 خود نیز صعودی می باشد $\Rightarrow$ می توان برای
 یافتن b و a در $h(x)$ (بر $h(x) = 8$ و $h(x) = -1$) را داد.

$$f(x) = x - [x] \cdot 2^x \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) < \frac{3}{2}$$

$$g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = \frac{1}{2} (2^x - 2^{-x})$$

- با توجه به آنکه 2^x تابعی صعودی است
 و 2^{-x} نیز تابعی کاهشی است
 و $\frac{1}{2}$ تاثیر در نزولی و صعودی ندارد
 $\Rightarrow g(x)$ نیز تابعی صعودی است

$$g \circ f = g(f(x)) \rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8} \quad g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{43}{16}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8} \quad g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{43}{16}$$

$$x \leq f(x) < 3$$

$$\Rightarrow R_{g \circ f} = \left[\frac{15}{8}, \frac{43}{16}\right]$$

$\Rightarrow$ می توان در $h(x)$ (بر $h(x) = 3$ و $h(x) = \frac{1}{2}$) را به دست آورد و در g جایگزین کرد