(سارا امینی راد)

17,25

① **۲**

$f(x+2)\begin{cases}3x+5 & x\geq 1\\ 4x-1 & x<1\end{cases} \rightarrow f(x)\begin{cases}3(t-2)+5 = 3t-6+5 & t-2\geq 1\\ 4(t-2)-1 = 4t-8-1 & t-2<1\end{cases}$

$x+2=t \rightarrow x=t-2$

$\rightarrow f(x)\begin{cases}3x-1 & x\geq 3\\ 4x-9 & x<3\end{cases}$

اینجا شیب ها مثبته و فهمیم تابع صعودیه پس:

تابع صعودی $\rightarrow 3-x \geq x+1$ $\boxed{x\leq 1}$

$f(3-x)-f(x+1)\geq 0 \rightarrow f(3-x)\geq f(x+1)$

$\rightarrow f(3-x)\begin{cases}3(3-x)-1 = 9-3x-1 = -3x+8 & 3-x\geq 3 \rightarrow x\leq 0\\ 4(3-x)-9 = 12-4x-9 = -4x+3 & 3-x<3 \rightarrow x>0\end{cases}$

$f(x+1)\begin{cases}3(x+1)-1 = 3x+3-1 = 3x+2 & x+1\geq 3 \rightarrow x\geq 2\\ 4(x+1)-9 = 4x+4-9 = 4x-5 & x+1<3 \rightarrow x<2\end{cases}$

$x\leq 0$ ①
$\rightarrow -3x+8 \geq 4x-5 \rightarrow 13\geq 7x \rightarrow x\leq \frac{13}{7}$ ② $\rightarrow$ ①,② $\cap \rightarrow x\leq 0$

① $x\geq 2$
$\rightarrow -4x+3 \geq 3x+2 \rightarrow 1\geq 7x \rightarrow x\leq \frac{1}{7}$ ② $\rightarrow$ ①,② $\cap \rightarrow \varnothing$

$0<x<2$ ①
$\rightarrow -4x+3 \geq 4x-5 \rightarrow 8\geq 8x \rightarrow x\leq 1$ ② $\rightarrow$ ①,② $\cap \rightarrow 0<x\leq 1$

$\cup \rightarrow D_f = (-\infty, 1]$ ✓

② **۲**

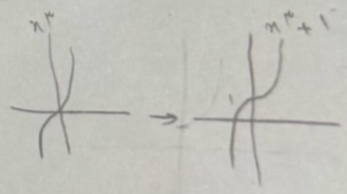
$f(f(x)) < f(x^3) \rightarrow f(x) < x^3 \rightarrow (x^3+x)^3 < x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} x^3+x < x$

که صعودی است

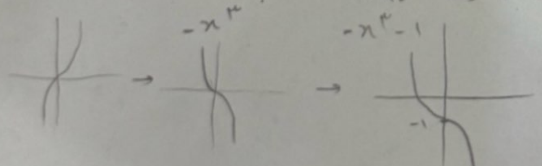
✓ $(-\infty, 0) \leftarrow x<0 \leftarrow x^3<0$

③ **۲**

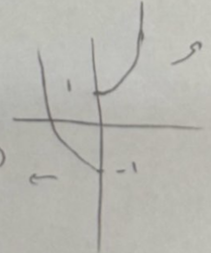
$y=|x|(x^2+\frac{1}{x}) \rightarrow x>0 \rightarrow x(x^2+\frac{1}{x}) = x^3+1 \rightarrow$



$\rightarrow x<0 \rightarrow -x(x^2+\frac{1}{x}) = -x^3-1$



$\Rightarrow$



اکیداً نزولی $(-\infty, 0)$

$(0, +\infty) \rightarrow$ اکیداً صعودی

[illegible] ✓

④ **۱**

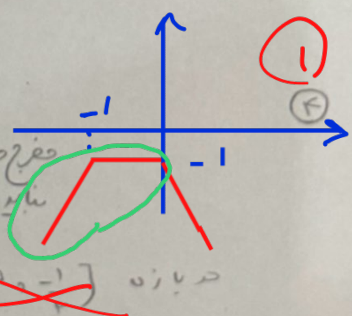
$x<-1 \rightarrow |x|-|x+1| = -x-(-(x+1)) = 1$

$f(x) = \frac{2x+1}{1} \rightarrow x<-1$ ✓ $\rightarrow$ خط با شیب ۲ $\rightarrow$ صعودی ✓

$-1\leq x<0 \rightarrow |x|-|x+1| = -x-(x+1) = -2x-1$ $x\neq -\frac{1}{2} \rightarrow$ مخرج صفر نباید شد

$\frac{2x+1}{-2x-1} = -1$ ✓ $\rightarrow$ ثابت

$x\geq 0 \rightarrow |x|-|x+1| = x$ $\frac{2x+1}{-1} \rightarrow$ نزولی ✓



صعودی $(-\infty, 0)$

$a=0$

در بازه ~~$[-\infty, -1]$~~

که صعودی اما $-\frac{1}{2}$ ریشه مخرج

(سارا امینی راد)

$x^2 - 2x - 8 > 0 \quad (x-4)(x+2) > 0 \xrightarrow{D_f} x < -2 , x > 4$

باید نزولی باشد

$-\frac{b}{2a} = \frac{-(-2)}{2} = 1 \quad x < 1 \to$ نزولی $\quad \cap \quad (-\infty, -2)$ اکیدا نزولی ✓

۵) ۲

$f(x) = (\underbrace{a^2 - 3}_{t})^x$

۶) ۱٫۵

$t > 1$

$0 < t < 1 \quad \times$

الف) $a^2 - 3 > 1 \to a^2 > 4 \Rightarrow a > 2 \to a < -2$ ✓

ب) $a^2 - 3 \geq 1 \to a^2 \geq 4 \to a \geq 2$ ✓ $\quad a \leq -2$

عدد ثابت → اگر برابر ۱ باشد → معمولی → $a = \pm\sqrt{3}$

۷) ۲

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \to f'(-3) = 0 \quad f'(x) = 3(x+3)^2$

مشتق $\to 3x^2 + 2ax + b \to 3(x+3)^2 = 3x^2 + 18x + 27 \to a = 9 \quad b = 27$

$f(-3) = -27 + 81 - 81 + c \sim c = 26 \quad f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 26 \Rightarrow (x+3)^3 - 1$

$\to (x+3)^3 > 1 \to x > -2 \to$ کمترین $x = -2$ ✓

$f \circ f(x) \to f(x) \geq 0$ $\quad \boxed{x \leq 1}$ ۳

$f \circ f(x) \leq f(\sqrt{x}) \quad \sqrt{x} \quad x \geq 0 \quad x + \sqrt{x} - 2 \leq \sqrt{x} \to x \leq 2 \quad 0, 1, 2 \to$ ۳ $\quad \cap \; 1, 2, 3$

زیرا صعودی زیر رادیکال

معمولی

۸) $[1, 2]$ دو عدد $\quad$ ۱٫۲۵

$\cos^2 x = 0 \to 2^{-1} - 2^1 = -\frac{3}{2}$ min

$\cos^2 x = 1 \to 2^2 - 2^{-2} = \frac{15}{4}$ max $\quad \to b - a = \frac{21}{4}$

$\sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} \quad \sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x}$

$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 9} 0 \leq 9\cos^2 x \leq 9 \xrightarrow{-1} -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8$

۹) ۱٫۵

$-1 \leq \cos x \leq 1 \to 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times -9} 0 \geq -9\cos^2 x \geq -9 \xrightarrow{+1} 1 \geq -9\cos^2 x + 1 \geq -8$ ✓

$-1 \leq \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} \leq 2$

$1 \geq \sqrt[3]{-9\cos^2 x + 1} \geq -2$

$-2 \leq \sqrt[3]{-9\cos^2 x + 1} \leq 1$ ✓

~~$2^{-1} - 2^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ کمترین~~

~~$2^2 - 2^1 = 4 - 2 = 2$ بیشترین~~

$[\frac{1}{4}, 2]$

$2 - \frac{1}{4} = \frac{8-1}{4} = \frac{7}{4}$

۱۰) ۲

$f(x) = x - [x+2] \quad g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \quad g \circ f = g(x - [x+2])$

$t = x + 2 \to f(x) = t - 2 - [t] = (t - [t]) - 2 = \{t\} \in [0, 1)$

$f \to [-2, -1) \nearrow x = -2 \quad \frac{2^{-2} - 2^2}{2} = \frac{\frac{1}{4} - 4}{2} = \frac{\frac{1-16}{4}}{2} = -\frac{15}{8} \to R_f = [-\frac{15}{8}, -\frac{3}{4})$ ✓

$x = -1 \quad \frac{2^{-1} - 2^1}{2} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{2} = \frac{\frac{1-4}{2}}{2} = \frac{-3}{4}$