(سارا امینی راد)

①

$$f(x+2)\begin{cases}3x+5 & x\geq 1\\ 4x-1 & x<1\end{cases} \rightarrow f(x)\begin{cases}3(t-2)+5 = 3t-6+5 & t-2\geq 1\\ 4(t-2)-1 = 4t-8-1 & t-2<1\end{cases}$$

$x+2=t \rightarrow x=t-2$

$$\rightarrow f(x)\begin{cases}3x-1 & x\geq 3\\ 4x-9 & x<3\end{cases}$$

$f(3-x)-f(x+1)\geq 0 \rightarrow f(3-x)\geq f(x+1)$

$$\rightarrow f(3-x)\begin{cases}3(3-x)-1 = 9-3x-1 = \underline{-3x+8} & 3-x\geq 3 \rightarrow x\leq 0\\ 4(3-x)-9 = 12-4x-9 = \underline{-4x+3} & 3-x<3 \rightarrow x>0\end{cases}$$

$$f(x+1)\begin{cases}3(x+1)-1 = 3x+3-1 = \underline{3x+2} & x+1\geq 3 \rightarrow x\geq 2\\ 4(x+1)-9 = 4x+4-9 = \underline{4x-5} & x+1<3 \rightarrow x<2\end{cases}$$

$x\leq 0$ ① $\rightarrow -3x+8 \geq 4x-5 \rightarrow 13\geq 7x \rightarrow x\leq \frac{13}{7}$ ② $\rightarrow$ ①∩② $\rightarrow x\leq 0$

$x\geq 2$ ① $\rightarrow -4x+3 \geq 3x+2 \rightarrow 1\geq 7x \rightarrow x\leq \frac{1}{7}$ ② $\rightarrow$ ①∩② $\rightarrow \emptyset$

$0<x<2$ ① $\rightarrow -4x+3 \geq 4x-5 \rightarrow 8\geq 8x \rightarrow x\leq 1$ ② $\rightarrow$ ①∩② $\rightarrow 0<x\leq 1$

$\cup \rightarrow D_f = (-\infty, 1]$

②

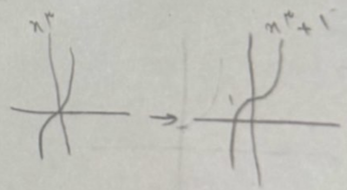
$f(f(x)) < f(x^3) \rightarrow f(x) < x^3 \rightarrow (x^3+x)^3 < x^3 \xrightarrow{\text{فرجه ۳ می‌گیریم}} x^3+x<x$

صعودی است

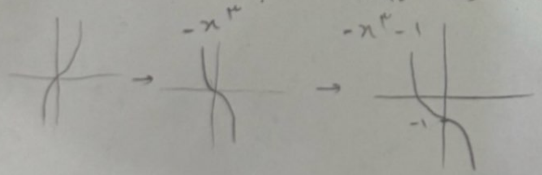
$(-\infty, 0) \leftarrow x<0 \leftarrow x^3<0$

③

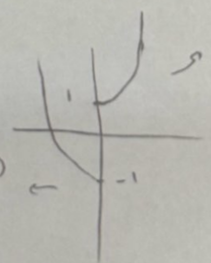
$y=|x|(x^2+\frac{1}{x}) \rightarrow x>0 \rightarrow x(x^2+\frac{1}{x}) = x^3+1 \rightarrow$



$\quad\hookrightarrow x<0 \rightarrow -x(x^2+\frac{1}{x}) = -x^3-1$



$\Rightarrow$



ابتدا صعودی $\leftarrow (0, +\infty)$

ابتدا نزولی $(-\infty, 0)$

نایکنوا

④

$x<-1 \rightarrow |x|-|x+1| = -x-(-(x+1)) = 1$

$f(x) = \frac{2x+1}{1} \rightarrow x<-1$ خط با شیب ۲ $\rightarrow$ صعودی

$-1\leq x<0 \rightarrow |x|-|x+1| = -x-(x+1) = -2x-1 \qquad x\neq -\frac{1}{2} \rightarrow$ مخرج صفر نباید شود

$\frac{2x+1}{-2x-1} = -1 \longrightarrow$ ثابت

$x\geq 0 \rightarrow |x|-|x+1| = x \qquad \frac{2x+1}{-1} \rightarrow$ نزولی

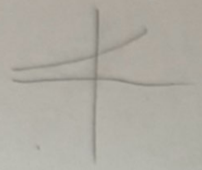
در بازه $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ نه صعودی اما $-\frac{1}{2}$ ریشه مخرج

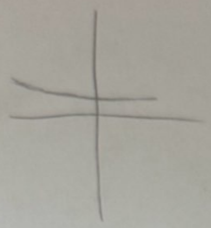
(سه راداسینی دار)

$x^{۲}-۲x-۸>۰ \quad (x-۴)(x+۲)>۰ \xrightarrow[D_f]{} x<-۲,\ x>۴$

۵) باید نزولی باشد $\quad -\frac{b}{۲a}=\frac{-(-۲)}{۲}=۱ \quad x<۱ \to$ نزولی $\xrightarrow{\cap} (-\infty,-۲)$ اکیدا صعودی

۶) $f(x)=(\underbrace{a^{۲}-۳}_{t})^{x}$





$t>۱$

$۰<t<۱$ ×

الف) $a^{۲}-۳>۱ \to a^{۲}>۴ \Rightarrow a>۲ \to a<-۲$ ،

ب) $a^{۲}-۳\geq۱ \to a^{۲}\geq۴ \to a\geq۲ ,\ a\leq-۲$

اگر برابر ۱ باشد → عدد ثابت → صعودی ✓

۷) $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c \to f'(-۳)=۰ \qquad f'(x)=۳(x+۳)^{۲}$

مشتق $\to ۳x^{۲}+۲ax+b \to ۳(x+۳)^{۲}=۳x^{۲}+۱۸x+۲۷ \to a=۹ \quad b=۲۷$

$f(-۳)=-۲۷+۸۱-۸۱+c \sim c=۲۶ \quad f(x)=x^{۳}+۹x^{۲}+۲۷x+۲۶ \Rightarrow (x+۳)^{۳}-۱$

$\to (x+۳)^{۳}>۱ \to x>-۲ \to$ کمترین $x=-۲$

۸) $f\circ f(x)\leq f(\sqrt{x}) \qquad f(x)\leq\sqrt{x} \to x\geq۰$ ✓

زیرا دامنه زیر رادیکال

صعودی

$x+\cancel{\sqrt{x}}-۲\leq\cancel{\sqrt{x}} \to x\leq۲$ ✓

$۰,۱,۲ \to$ ۳تا $\quad \cap \ ۱,۲$

۹) $\sqrt[۳]{۹\cos^{۲}x-۱} \qquad \sqrt[۳]{۱-۹\cos^{۲}x}$

$-۱\leq\cos x\leq۱ \xrightarrow{\text{توان }۲} ۰\leq\cos^{۲}x\leq۱ \xrightarrow{\times۹} ۰\leq۹\cos^{۲}x\leq۹ \xrightarrow{-۱} -۱\leq۹\cos^{۲}x-۱\leq۸$

$\to -۱\leq\sqrt[۳]{۹\cos^{۲}x-۱}\leq۲$ ل

$-۱\leq\cos x\leq۱ \longrightarrow ۰\leq\cos^{۲}x\leq۱ \xrightarrow{\times-۹} ۰\geq-۹\cos^{۲}x\geq-۹ \xrightarrow{+۱} ۱\geq-۹\cos^{۲}x+۱\geq-۸$

$\to ۱\geq\sqrt[۳]{-۹\cos^{۲}x+۱}\geq-۲$

$\to -۲\leq\sqrt[۳]{-۹\cos^{۲}x+۱}\leq۱$

$۲^{-۱}-۲^{-۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۲-۱}{۴}=\frac{۱}{۴} \to$ کمترین $\qquad [\frac{۱}{۴},۲]$

$۲^{۲}-۲^{۱}=۴-۲=۲$ بیشترین $\qquad ۲-\frac{۱}{۴}=\frac{۸-۱}{۴}=\frac{۷}{۴}$

۱۰) $f(x)=x-[x+۲] \quad g(x)=\frac{۲^{x}-۲^{-x}}{۲} \qquad g\circ f=g(x-[x+۲])$

$t=x+۲ \to f(x)=t-۲-[t]=(t-[t])-۲=\{t\}\in[۰,۱)$

$f\to[-۲,-۱) \quad x=-۲ \quad \frac{۲^{-۲}-۲^{۲}}{۲}=\frac{\frac{۱}{۴}-۴}{۲}=\frac{\frac{۱-۱۶}{۴}}{۲}=-\frac{۱۵}{۸} \to R_f=[-\frac{۱۵}{۸},-\frac{۳}{۴})$

باز $x=-۱ \quad \frac{۲^{-۱}-۲^{۱}}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}-۲}{۲}=\frac{\frac{۱-۴}{۲}}{۲}=\frac{-۳}{۴}$