دوازدهم (A) — تکلیف شماره ۹ — دریا شهرآرانیا

1. $y=\sqrt{f(3-x)-f(x+1)}$, D_y?

$$f(x+2)=\begin{cases}3x+5 & x\ge 1\\ 4x-1 & x<1\end{cases}$$

$x+2=t \to x=t-2$

$$f(t)=\begin{cases}3t-1 & t\ge 3\\ 4t-9 & t<3\end{cases} \quad , \quad \underbrace{f(3-x)-f(x+1)}_{g(x)}\ge 0$$

$$\begin{cases}f(3-x)=3(3-x)-1=8-3x & x\le 0\\ f(3-x)=4(3-x)-9=3-4x & x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(x+1)=3(x+1)-1=3x+2 & x\ge 2\\ f(x+1)=4(x+1)-9=4x-5 & x<2\end{cases}$$

① if $x\le 0 \to g(x)=(8-3x)-(4x-5)=13-7x$
$13-7x\ge 0 \to x\le \frac{13}{7} \cap x\le 0 \to x\le 0$

② if $0<x<2 \to g(x)=(3-4x)-(4x-5)=8-8x$
$8-8x\ge 0 \to x\le 1 \cap 0<x<2 \to 0<x\le 1$

③ if $x\ge 2 \to g(x)=(3-4x)-(3x+2)=1-7x$
$1-7x\ge 0 \to x\le \frac{1}{7} \cap x\ge 2 \to \varnothing$

① ∩ ② ∩ ③ $=(-\infty,1]$ جواب

۲-

$f(x) = (x^3+x)^3 \qquad fof(x) < f(x^3)\ ?$

$f(x)$ صعودی است پس ترکیب آن یعنی $fof(x)$ نیز صعودی است پس میتوان f ها را بدون تغییر علامت نامساوی حذف کرد از طرفین

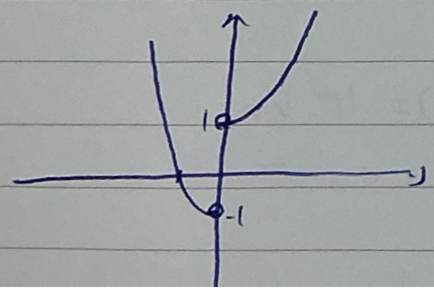
$$\cancel{f}(f(x)) < \cancel{f}(x^3) \rightarrow f(x) < x^3 \rightarrow (x^3+x)^3 < x^3 \rightarrow$$

از طرفین رادیکال ۳ میگیریم $\rightarrow x^3 + x < x \rightarrow x^3 < 0 \rightarrow x < 0$

جواب $(-\infty, 0)$

۳-

$$|x|\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \rightarrow \begin{cases} x^3+1 & x>0 \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ -x^3-1 & x<0 \rightarrow \text{اکیداً نزولی} \end{cases} \rightarrow \text{غیر یکنوا است}$$

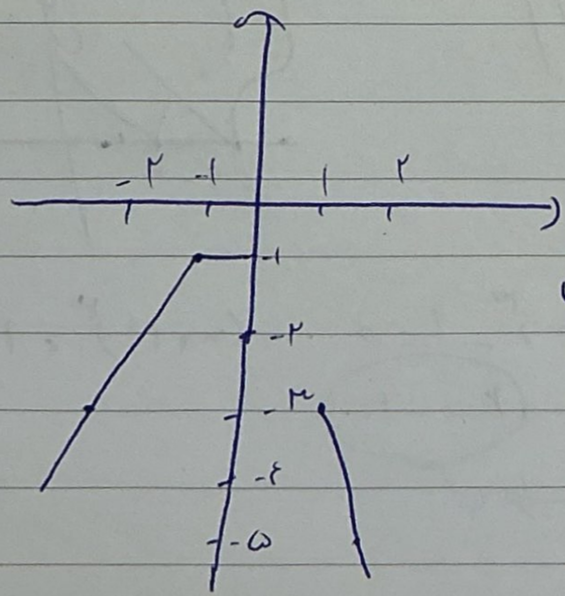


۴_ $f(x) = \dfrac{2x+1}{|x|-|x+1|}$

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{-x-(-x-1)} = \dfrac{2x+1}{-x+x+1} = 2x+1 & x \leq -1 \\ \dfrac{2x+1}{-x-x-1} = \dfrac{2x+1}{-2x-1} = -1 & -1 < x < 0 \\ \dfrac{2x+1}{-x-x-1} = -2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$x = -1 \to y = -1 \;/\; x = -2 \to y = -3 \;/\; x = 0 \to y = -1 \;/\; x = 1 \to y = -3$

$x = 2 \to y = -5$



در بازه‌ی $(-\infty, a]$ صعودی است

در بازه‌ی $[0, -\infty)$ نزولی است

$\boxed{a = 0}$

جواب

۵-

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-8) \longrightarrow x^2-2x-8>0 \rightarrow (x-4)(x+2)>0$

a

	-2		4	
$+$		$-$		$+$

$x<-2 \;,\; x>4 \longleftarrow$

چون $0<a<1$ است پس لگاریتم نزولی است پس برای صعودی بودن y ← با افزایش x باید عدد داخل لگاریتم کاهش پیدا کند

✓ وقتی x افزایش پیدا میکند مثلا از ۵- به ۳- مقدار x^2-2x-8 کاهش پیدا میکند $\longleftarrow x<-2$ (1

✗ وقتی x افزایش پیدا میکند مقدار x^2-2x-8 افزایش پیدا میکند $\longleftarrow x>4$ (2

جواب ← $(-\infty,-2)$

۶-

$f(x)=(a^2-3)^x$

الف) شرط صعودی اکید بودن تابع نمایی ←

$a^2-3>1 \rightarrow a^2>4$

$a>2 \;,\; a<-2$

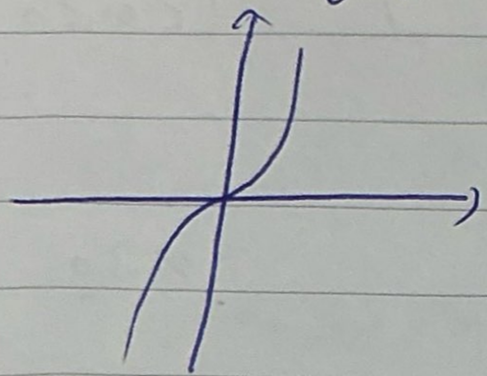
ب) برای صعودی بودن، تابع ثابت هم جزو جواب هاست ←

$a^2-3\geq 1 \rightarrow a^2\geq 4$

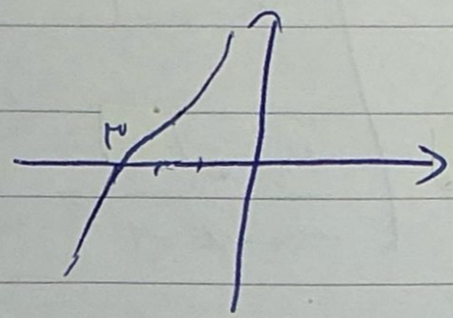
$a\geq 2 \;,\; a\leq -2$

۷_ چون در نقطه (۱-و۳-) مرحله موازی محور xها مماس است همان نقطه‌ای است که درجه ۳ در آن با محور x تماس دارد (نقطه عطف)

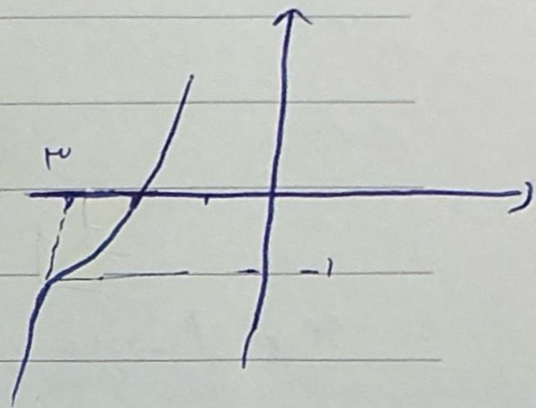
$y=x^3$



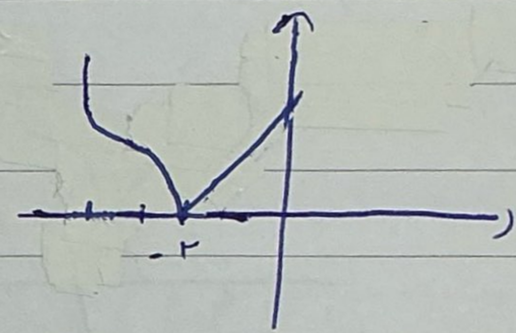
$y=(x+3)^3$



$y=(x+3)^3-1$



$y=|f(x)| \to y=|(x+3)^3-1|$



در بازه‌ی $(k,+\infty)$ اکیداً صعودی

$|(x+3)^3-1|=0 \to (x+3)^3-1=0 \to (x+3)^3=1 \to$

$\to x+3=1 \to x=-2 \to k=-2$

جواب

۸- چون $f(x)$ صعودی است پس $fof(x)$ هم صعودی است و می‌توانیم از طرفین f را خط بزنیم

$f(x) = x + \sqrt{x} - 2$ $\qquad$ $fof(x) \leq f(\sqrt{x})$

$f(x) \leq \sqrt{x} \rightarrow x + \cancel{\sqrt{x}} - 2 \leq \cancel{\sqrt{x}} \rightarrow x \leq 2$ (1)

$\xrightarrow{\text{شرط رادیکال}} x \geq 0$ (2)

$(1) \cap (2) \rightarrow 0 \leq x \leq 2$ $\qquad$ شامل ۳ عدد صحیح است $\leftarrow \{0, 1, 2\}$

dotnote

۹

$f(x) = 2^{\sqrt[3]{9\cos^2 x - 1}} - 2^{\sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x}} \to R_f = [a, b] \quad b - a ?$

$0 \le \cos^2 x \le 1 \to 0 \le 9\cos^2 x \le 9 \to -1 \le 9\cos^2 x - 1 \le 8 \to$

$\to -1 \le \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} \le 2 \to \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} = t$

$f(t) = 2^t - 2^{-t} \; ; \; -1 \le t \le 2$

تابع 2^t صعودی است و 2^{-t} نزولی است $\Leftarrow$ صعودی = نزولی − صعودی $= f(t)$

$R_{f(t)} = [f(-1), f(2)] = [-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}] \to b - a = \frac{15}{4} - (-\frac{3}{2}) = \frac{21}{4}$

جواب

۱۰ـ

$f(x) = x - [x + 2] \qquad g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \qquad R_{gof(x)} = ?$

$f(x) = x - [x] + 2 \qquad 0 \le x - [x] < 1 \xrightarrow{+2} 2 \le x - [x] + 2 < 3$

$R_f = D_g = [2, 3) \qquad y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \xrightarrow{x=2} \frac{2^2 - 2^{-2}}{2} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{8}$

$y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \xrightarrow{x=3} \frac{2^3 - 2^{-3}}{2} = \frac{8 - \frac{1}{8}}{2} = \frac{63}{16}$

$R_{gof} = [\frac{15}{8}, \frac{63}{16})$