

(۱) $f(x) - x f(x) = 2|x| + 1 \Rightarrow f(-x) = 2|x| + 1 + x f(x)$ در دو طرف با x ضرب می‌کنیم

$f(x) + x f(-x) = 2|x| + 1$

$f(x) + x(2|x| + 1 + x f(x)) = 2|x| + 1 \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{(2|x| + 1)(1 - x^2)}{1 + x^2} \quad (\rightarrow x \in \mathbb{R})$$

(۲) $x = 0 \Rightarrow f(0) + f(0) = 2 \Rightarrow 2f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = 1$

$f(x^2) + f(0) = (x^2)^2 - 2(x^2) + 2 \Rightarrow f(x^2) = x^4 - 2x^2 + 2$

(۳) $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ در دو طرف با $x - 1$ ضرب می‌کنیم $\Rightarrow y(x - 1) = x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 + (1 - y)x + y + 2 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(1-y)^2 - 4(y+2)}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{y^2 - 2y - 7}}{2}$

$\sqrt{\Delta} \geq 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 7 \geq 0 \Rightarrow (y+1)(y-7) \geq 0$ در جدول علامت

$R_f = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$

(۴) الف) $y = 2x^2 - 5x + 1$ در دو طرف با x ضرب می‌کنیم $\Rightarrow -\frac{b}{2a} = \left[\frac{5}{4} = x\right] \Rightarrow y = -\frac{17}{8}$

$R_f = \left[-\frac{17}{8}, +\infty\right)$



ب) $y = \sqrt{-x^2 + 2x - 5}$ $\rightarrow -x^2 + 2x - 5 \geq 0 \Rightarrow y = 4$

$y = \sqrt{(-\infty, 4]} \Rightarrow R = [0, 2]$



ج) $\sqrt{x^2 - 2x^2 + 4x + 1} \Rightarrow$

$\sqrt{(-\infty, +\infty)} \Rightarrow [0, +\infty) = R_y$

د) $y = \lg(x^2 - 4x^2 + 7x + 4) \Rightarrow x^2 - 4x^2 + 7x + 4 \geq 0 \Rightarrow R = R_y$

$\lg(-\infty, +\infty) \Rightarrow R_y = (-\infty, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

۵) در تمام محورهای به شکل $R = \{ \frac{a}{c} \}$ است.

الف) $\frac{cx+1}{x-x} \Rightarrow R_y = \mathbb{R} - \{ \frac{c}{x} \}$

ب) $\sqrt{\frac{cx+1}{x-x}} \Rightarrow R_y = \mathbb{R} - \{ \frac{c}{x} \} \Rightarrow R_y = [0, +\infty) - \{ \frac{c}{x} \}$

ج) $\frac{x^2+c}{\sqrt{x^2+c}} \Rightarrow \frac{x^2+c+1}{\sqrt{x^2+c}} \Rightarrow \sqrt{x^2+c} + \frac{1}{\sqrt{x^2+c}} \xrightarrow{a+\frac{1}{a}} \sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}} = \left[\frac{c\sqrt{c}}{3} \right]$
 $\sqrt{x^2+c}$ نمی تواند ۰ شود، کمترین مقدار آن $\sqrt{c}$ است $\Leftarrow$
 $R_y = \left[\frac{c\sqrt{c}}{3}, +\infty \right)$

د) $y = x^2 + \frac{1}{x^2+c} \Rightarrow x^2+c + \frac{1}{x^2+c} - c \xrightarrow{a+\frac{1}{a}} c + \frac{1}{c} - c = \left(\frac{1}{c} \right)$
 x^2+c نمی تواند ۰ شود، کمترین مقدار آن $\frac{1}{c}$ است $\Leftarrow$
 $R_y = \left[\frac{1}{c}, +\infty \right)$

۶) روش اصلی $\Leftarrow$
 $y = \frac{cx^2+c}{x^2-1} \Rightarrow yx^2-y = cx^2+c \Rightarrow yx^2-cx^2 = y+c \Rightarrow$
 $x^2(y-c) = y+c \Rightarrow x^2 = \frac{y+c}{y-c} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y+c}{y-c}} \Rightarrow \frac{y+c}{y-c} > 0 \dots$
 $\frac{y+c}{y-c} > 0 \Rightarrow R_y = (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$

۷-۲. چون خروج ۰ می شود، خارج دهنده.
 $x^2 = \frac{y+c}{y-c} \Rightarrow \frac{y+c}{y-c} \geq 0 \begin{cases} y \leq -c \\ y > c \end{cases}$

۷) $f(x) = \frac{c \sin x + c}{\sin x - c} \Rightarrow y \sin x - cy = c \sin x + c \Rightarrow \sin x (y-c) = c(y+c)$
 $\sin x = \frac{c(y+c)}{y-c} \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{c(y+c)}{y-c} \leq 1$
 $\left. \begin{aligned} &\frac{c(y+c)}{y-c} \leq 1 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{c} \\ &\frac{c(y+c)}{y-c} \geq -1 \Rightarrow y \leq -3 \end{aligned} \right\} R_y = \left[-3, -\frac{1}{c} \right]$

الف) $y = \left| \frac{cx-1}{cx} \right| \rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{c}{x} - \frac{1}{cx} \right|$
 $R_y = (0, +\infty)$

۸) داخل قدر مطلق هر عددی به غیر از $\frac{c}{x}$ می تواند باشد، اما چون قدر مطلق داریم خروجی هر مقدار نامنفی می باشد.

ب) $\sqrt{\frac{cx-1}{-1+cx}} \Rightarrow \sqrt{\frac{c(x-1)}{c(x-1)}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{c}} = \left[\frac{c}{2} \right] R_y = \left\{ \frac{c}{2} \right\}$

$y = x(|x|-c) \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 & x^2 - cx \\ x < 0 & -x^2 - cx \end{cases} \Rightarrow$
 $R_y = \mathbb{R}$

