تکلیف شماره ۲۰ — ۱۸ — [illegible]

۱

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty \qquad a+b=?$$

چون باید حتماً 0^+ شود پس مربع بوده تا به ازای 2^+ و 2^- هر دو 0^+ شود

۳

صورت $\to x=2 \to (-1) \Rightarrow$ در نتیجه مخرج باید 0^+ شود تا حاصل $-\infty$ باشد $\Rightarrow x^2+ax+b=(x-2)^2 \to x^2-4x+4$

$a=-4\ ,\ b=+4$

$\to a+b=0$

۲

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{4}}\frac{x}{x^2+ax+b}=+\infty \qquad \left[\frac{b}{a}\right]=?$$

مخرج باید 0^+ شود تا حاصل حد $+\infty$ شود

صورت $\to \sqrt[3]{4}>0 \longrightarrow$ مخرج باید 0^+ باشد! $\to x^2+ax+b \xrightarrow{x=\sqrt[3]{4}} 0^+ \longrightarrow (x-\sqrt[3]{4})^2=x^2-2\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16}$

۲

$\longrightarrow a=-2\sqrt[3]{4}\ ,\ b=\sqrt[3]{16} \longrightarrow \left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{\sqrt[3]{4}\times\cancel{\sqrt[3]{4}}}{-2\cancel{\sqrt[3]{4}}}\right]^{-1<\ <0} \Rightarrow =(-1)$

عبارت بین صفر و ۱-

۳

$$\lim_{x\to(\frac{1}{\sqrt{3}})^+}\frac{[-x]+a}{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}x+a\right|+a}=-\infty \qquad [a]=?$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\simeq 0{,}57$

۱

صورت $\to [-\frac{1}{\sqrt{3}}]+a \to -1+a$

مخرج $\to \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\left|\frac{1}{3}+a\right|+a$

$\Rightarrow \frac{a-1}{\left|\frac{1}{3}+a\right|+a}$

۴

ابتدا تکلیف براکت‌ها را مشخص می‌کنیم

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{14x-\left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x+\left[\frac{3}{x^2}\right]}$$

$x\to(-\frac{1}{2})^+$ مثل همسایگی $\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\left[-\frac{2}{(-\frac{1}{2}^+)^2}\right]=\left[-\frac{2}{(\frac{1}{4})^-}\right]=\left[-8^+\right]=\cancel{-8}\ 9$

۱٫۵

$\left[\frac{3}{(-\frac{1}{2})^+}\right]=\left[\frac{3}{(\frac{1}{4})^-}\right]=\left[12^+\right]=(12)$

$\Rightarrow \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{14x+8}{24x+12}=\frac{8(\cancel{14x+1})}{12(\cancel{2x+1})}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

با معادله نامعادله حل کن که اشتباه نکنی!

۵

اشتباه تکیه‌ای (?)

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}=\frac{4}{4+4+4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

$$[(2^+)^3]=[8^+]=8\to x^3-8$$

2

۶

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}=\text{مبهم}\xrightarrow{Hop}\frac{2x+10}{6\left(\frac{1}{\cancel{3}\sqrt[3]{x^2}}\right)}\xrightarrow{\text{۸− را جایگذاری می‌کنیم}}\frac{-6}{\frac{1}{2}}=-12$$

2

۷

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}=\text{مبهم}\xrightarrow{Hop}\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}-\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{\frac{\sin x}{\cancel{2}\sqrt{1-\cos x}}}$$

1,5

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\longrightarrow\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sin x}{2\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}}}\xrightarrow{\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\frac{\frac{\cancel{4}^{2}}{2\sqrt{2}}}{\frac{4\sin\cancel{\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}\sin\cancel{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cot\frac{x}{2}}=2\tan\frac{x}{2}=0$$

۸

$$\lim_{x\to 0}\frac{k+\cos(\sqrt{a}x)}{kx^2}=3\qquad\frac{a}{k}=?$$

چون مخرج صفر است
پس باید صورت هم صفر بوده از $\frac{0}{0}$
رفع ابهام شود تا حاصل محدود شده

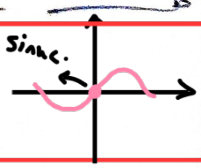
$$k+\cos 0\Rightarrow k=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1+\cos(\sqrt{a}x)}{-1x^2}\xrightarrow{Hop}\frac{-\sqrt{a}\sin(\sqrt{a}x)}{-2x}\xrightarrow{Hop}\frac{a\cos(\sqrt{a}x)}{2}=\frac{3}{1}$$

هم‌ارزی

$$\frac{1-\frac{ax^2}{2}}{x^2}=3$$

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$



$$\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}-\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1}=\frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{-8}{4}=-2$$

سوال ۷ با hop

(۸)

$$\lim_{x\to 0}\frac{k+\cos(\sqrt{a}\,x)}{kx^2}=3 \qquad \frac{a}{k}=?$$

* چون مخرج صفر است پس باید صورت هم صفر بوده
که بتوانیم رفع ابهام کنیم تا حاصل ۳ شود

$\to k=? \to k+1=0 \to k=-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{a}\,x)-1}{-x^2} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \frac{\cancel{x}+\frac{ax^2}{2}-\cancel{x}}{\cancel{x^2}} \Rightarrow \frac{a}{2}=3 \to a=6$$

---

(۹)

$$\lim_{x\to (3a)^+}\frac{2\sqrt{x-3a}+3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}=? \qquad a>0$$

جایگذاری

$$\frac{0+3\sqrt{3a}-\sqrt{27a}}{0}=\frac{0}{0}=\text{مبهم}$$

Hop

$$\frac{2\left(\frac{1}{2\sqrt{x-3a}}\right)+3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-0}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9a^2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x-3a}}+\frac{3}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{x-3a}\times\sqrt{x+3a}}}$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{x-3a}}{2\sqrt{x}\,(\cancel{\sqrt{x-3a}})}}{\frac{x}{\cancel{\sqrt{x-3a}}\times\sqrt{x+3a}}}=\frac{(2\sqrt{x}+3\cancel{\sqrt{x-3a}})(\sqrt{x+3a})}{2\sqrt{x}\times x}=\frac{(2\cancel{\sqrt{3a}})(\sqrt{6a})}{3a\times 2\cancel{\sqrt{3a}}}=\frac{\sqrt{6a}}{3a}$$

---

(۱۰)

$$\lim_{x\to(-1)}\frac{1-k[x]}{x^2-1}=-\infty \qquad (k\pi,\cos k\pi)$$

حد $\begin{cases}(-1)^+\to 0^- \longrightarrow \text{صورت باید مثبت باشد} \xrightarrow{x=(-1)^+} 1-k[x]^{-1}=\cancel{\ \ } 1+k>0 \to k>-1\\ (-1)^-\to 0^+ \longrightarrow \text{صورت باید منفی باشد} \xrightarrow{x=(-1)^-} 1+2k<0 \to 2k<-1 \to k<-\frac{1}{2}\end{cases}$

$-1<k<-\frac{1}{2}$

مثلاً $-\frac{3}{4}$

$k\pi \longrightarrow -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow$ در ناحیه سوم دایره است $\to x<0$

با جایگذاری

$\cos -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{-3\pi}{4} \to \cos\frac{3\pi}{4}<0 \to y<0$

در ربع سوم

$\to$ در ناحیه سوم محورهای مختصات

۳

حاصل حد هنگامی به بی‌نهایت میل می‌کند که مخرج به صفر میل کند!

$$\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{3})^+} \left|\frac{\sqrt{3}}{3}x + a\right| + a = 0 \rightsquigarrow \left|\frac{1}{3} + a\right| + a = 0$$

$a \geq -\frac{1}{3} \to 2a + \frac{1}{3} = 0 \to a = -\frac{1}{6}$ $\rightsquigarrow [a] = -1$

$a \leq -\frac{1}{3} \to -\frac{1}{3} = 0$ غ ق ق ✗

۴

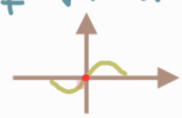
$x > -\frac{1}{2} \to x^2 < \frac{1}{4} \to \frac{1}{x^2} > 4 \to \frac{3}{x^2} > 12 \rightsquigarrow \left[\frac{3}{x^2}\right] = 12$

$\hookrightarrow -\frac{2}{x^2} < -8 \rightsquigarrow \left[-\frac{2}{x^2}\right] = -9$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} \frac{16x+9}{24x+12} = \frac{-8+9}{-12^+ + 12} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

۷

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} \times \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} =$$



$$\lim_{\to 0^-} \frac{4x \times \sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{2}\, x}{|\cancel{\sin x}|\, 2\sqrt{2}} = 2 \times \frac{x}{-\sin x} = \boxed{-2}$$

$\sin x$