تکلیف شماره ۲۰

محسن حسینی

(۱)

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty \qquad a+b=?$$

چون باید حتی 0^+ شود پس مربع بوده تا به ازای 2^+ و 2^- هر دو 0^+ شود

صورت $\to x=2 \to (-1) \Rightarrow$ در نتیجه مخرج باید 0^+ شود تا حاصل $-\infty$ باشد

$$\Rightarrow x^2+ax+b=(x-2)^2 \to x^2-4x+4$$

$$a=-4,\ b=+4$$

$$\to a+b=0$$

---

(۲)

$$\lim_{x\to \sqrt[3]{4}}\frac{x}{x^2+ax+b}=+\infty \qquad \left[\frac{b}{a}\right]=?$$

مخرج باید 0^+ شود تا حاصل حد $+\infty$ شود

صورت $\to \sqrt[3]{4}>0 \longrightarrow$ مخرج باید 0^+ باشد! $\Rightarrow x^2+ax+b \xrightarrow{x=\sqrt[3]{4}} 0^+ \longrightarrow (x-\sqrt[3]{4})^2 = x^2-2\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16}$

$$\longrightarrow a=-2\sqrt[3]{4},\ b=\sqrt[3]{16} \longrightarrow \left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{\sqrt[3]{4}\times\cancel{\sqrt[3]{4}}}{-2\cancel{\sqrt[3]{4}}}\right]^{<0} \Rightarrow = (-1)$$

عبارت بین صفر و ۱−

---

(۳)

$$\lim_{x\to(\frac{1}{\sqrt{2}})^+}\frac{[-x]+a}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}x+a\right|+a}=-\infty \qquad [a]=?$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0{,}707$$

صورت $\to [-\frac{1}{\sqrt{2}}^+]+a \to -1+a$

مخرج $\to \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\left|\frac{1}{2}+a\right|+a$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{\left|\frac{1}{2}+a\right|+a}$$

---

(۴)

ابتدا تکلیف براکت ها را مشخص میکنیم

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x-\left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x+\left[\frac{3}{x^2}\right]}$$

$x\to|-\frac{1}{2}|^+$ شد چون کمک $(-\frac{1}{2})$

$$\left[-\frac{2}{(-\frac{1}{2}^+)^2}\right]=\left[-\frac{2}{(\frac{1}{4})^-}\right]=\left[-8^+\right]=(-8)$$

$$\left[\frac{3}{(-\frac{1}{2})^+}\right]=\left[\frac{3}{(\frac{1}{4})^-}\right]=\left[12^+\right]=(12)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x+8}{24x+12}=\frac{8(\cancel{2x+1})}{12(\cancel{2x+1})}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

۵

اشتباه تایپی صورت

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-[x^3]} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \frac{4}{4+4+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$[(2^+)^3] = [8^+] = 8 \to x^3-8$$

۶

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \text{مبهم} \xrightarrow{\text{Hop}} \frac{2x+10}{2\cdot 6\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)} \xrightarrow{\text{8- را جایگذاری می‌کنیم}} \frac{-6}{\frac{1}{2}} = -12$$

۷

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{0}{0} = \text{مبهم} \xrightarrow{\text{Hop}} \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{\frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}}$$

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \longrightarrow \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sin x}{2\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}}} \xrightarrow{\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \frac{\frac{\cancel{4}^{2}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\cancel{4}\cancel{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}\cancel{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cot\frac{x}{2}} = 2\tan\frac{x}{2} = 0$$

۸

$$\lim_{x\to 0} \frac{k+\cos(\sqrt{a}x)}{kx^2} = 3 \qquad \frac{a}{k} = ?$$

چون مخرج صفر است
پس صورت هم صفر بوده از $\frac{0}{0}$
رفع ابهام شود که حد محدود شده

$$\text{پس} \quad k + \cos 0 = 0 \Rightarrow k=-1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1+\cos(\sqrt{a}x)}{-1x^2} \xrightarrow{\text{Hop}} \frac{+\sin(\sqrt{a}x)}{+2x} \xrightarrow{\text{Hop}} \frac{\cos(\sqrt{a}x)}{2} = \frac{3}{1} \longrightarrow \text{همراستی}$$

$$\frac{1-\frac{ax^2}{2}}{2} = 3$$

(۸)

$$\lim_{x\to 0}\frac{k+\cos(\sqrt{a}x)}{kx^2}=3 \qquad \frac{a}{k}=?$$

* چون مخرج صفر است پس باید صورت هم صفر بشود
که بتوان رفع ابهام بشود تا حاصل ۳ می‌شود

$k=? \to k+1=0 \to k=-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{a}x)-1}{-x^2}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\frac{\cancel{1}+\frac{ax^2}{2}-\cancel{1}}{\cancel{x^2}}\Rightarrow\frac{a}{2}=3\to a=6$$

---

(۹)

$$\lim_{x\to (3a)^+}\frac{2\sqrt{x-3a}+3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}=? \qquad a>0$$

جایگذاری

$$\frac{0+3\sqrt{3a}-\sqrt{27a}}{0}=\frac{0}{0}=\text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}}\frac{2\left(\frac{1}{2\sqrt{x-3a}}\right)+3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-0}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9a^2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x-3a}}+\frac{3}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{x-3a}\times\sqrt{x+3a}}}$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{x-3a}}{2\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x-3a})}}}{\frac{x}{\cancel{\sqrt{x-3a}}\times\sqrt{x+3a}}}=\frac{(2\sqrt{x}+3\cancel{\sqrt{x-3a}}^{\,0})(\sqrt{x+3a})}{2\sqrt{x}\times x}=\frac{(2\cancel{\sqrt{3a}})(\sqrt{6a})}{3a\times 2\cancel{\sqrt{3a}}}=\frac{\sqrt{6a}}{3a}$$

---

(۱۰)

$$\lim_{x\to(-1)}\frac{1-k[x]}{x^2-1}=-\infty \qquad (k\pi,\ \cos k\pi)$$

مخرج

$(-1)^+ \to 0^- \longrightarrow$ صورت باید مثبت باشد $\xrightarrow{x=(-1)^+} 1-k[x]^{-1}=\cancel{\ldots}\ 1+k>0 \to k>-1$

$(-1)^- \to 0^+ \longrightarrow$ صورت باید منفی باشد $\xrightarrow{x=(-1)^-} 1+2k<0 \to 2k<-1 \to k<-\frac{1}{2}$

$\underbrace{-1<k<-\frac{1}{2}}_{-\frac{3}{4}\ \text{شد}}$

$k\pi \xrightarrow{} -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow$ در ناحیه سوم دایره است $\to x<0$

ساعتگرد

$\cos -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos -\frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\text{در ناحیه سوم}} \cos\frac{3\pi}{4}<0 \to y<0$

→ در ناحیه سوم
عرض‌ها منفی است