شماره تکلیف: ۲۰ — سوگند زارعیان — آفرین ★★★ — ۱۹

(۱)

$\lim_{x\to 2}\frac{2x-a}{x^2+ax+b}=-\infty$ $\quad x^2+ax+b \Rightarrow 4+2a+b=0$

دارای $x=2$ صفر است $\quad 2a+b=-4$

$\lim_{x\to 2}\frac{2(2)-a}{0^+}=-\infty$ $\quad x^2+ax+b=(x-2)^2,\ x^2-4x+4 \Rightarrow a=-4,\ b=4$

$a+b=-4+4=0$

۲

(۲)

$\lim_{x\to\sqrt[3]{4}}\frac{x}{x^2+ax+b} \Rightarrow x^2+ax+b$ ، $x=\sqrt[3]{4}$ دارای ریشه مضاعف است $\Rightarrow x^2+ax+b=(x-\sqrt[3]{4})^2=x^2-2\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16}$

۲

$a=-2\sqrt[3]{4},\ b=\sqrt[3]{16} \Rightarrow \left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{-32}}\right]=\left[\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right]=-1$

(۳)

$\lim_{x\to(\frac{1}{\sqrt3})^+}\frac{[-x]+a}{|\frac{\sqrt3}{2}x+a|+a}=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{1}{\sqrt3})^+}\frac{[-\frac{1}{\sqrt3}]+a}{|\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{1}{\sqrt3}+a|+a}=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{1}{\sqrt3})^+}\frac{a-1}{|\sqrt3+a|+a}=-\infty$

۲

$|\sqrt3+a|+a=0$ $\quad$ ① $\sqrt3+a+a=0,\ a=-\frac{\sqrt3}{2}$ $\quad$ ② $\sqrt3=0$ ✗ $\Rightarrow a=-\frac{\sqrt3}{2}$ $\quad \left[-\frac{\sqrt3}{2}\right]=-1$

(۴)

۱/۵

$\lim_{x\to(-\frac12)^+}\frac{16x-[-\frac{2}{x^2}]}{24x+[\frac{3}{x^2}]} \Rightarrow \left[-\frac{2}{x^2}\right]_{x\to(-\frac12)^+}=-1 \quad \left[\frac{3}{x^2}\right]_{x\to(-\frac12)^+}=0 \quad \lim_{x\to(-\frac12)^+}\frac{16x+1}{24x}=\frac{-7}{12}$

نامساوی معادله حل کن ...!

(۵)

$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]} \Rightarrow [x^3]_{x\to2^+}=[8^+]=8 \Rightarrow \lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x^3-8}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+4+2x)}$

۲

$=\lim_{x\to2^+}\frac{x+2}{x^2+4+2x}=\frac{4}{4+4+4}=\frac13$

(۶)

$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{x^2+10x+16(144+36\sqrt[3]{x^2}-72\sqrt[3]{x})}{(12+6\sqrt[3]{x})(144+36\sqrt[3]{x^2}-72\sqrt[3]{x})}=\frac{(x+8)(x+2)(144+36\sqrt[3]{x^2}-72\sqrt[3]{x})}{(12)^3+(6)^3\times x}=$

۲

$\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(144+36\sqrt[3]{x^2}-72\sqrt[3]{x})}{6^3}=\frac{-6(144+36\times4+72\times2)}{6^3}=$ $\cancel{\frac{6^3(x+2^3)}{x+8}}$ $\quad \frac{-6\times3\times144}{6^3}=\frac{-\cancel{3}\times\cancel{144}^{12}}{\cancel{36}_{12}}=-12$

جواب آخر $=-12$

(۷)

$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\times\frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$

۱/۵

$\lim_{x\to0^-}\frac{2+3x-2+x}{\cancel{1-\cos x}}=\frac{4x}{2\sin^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{4x}{2\times\frac{x^2}{4}}=8x \quad \lim_{x\to0^-}=8x=0$

$2\sin^2\frac{x}{2}$ $\quad \sqrt{1-\cos x} \simeq |\sin x|$

(۸)

$\lim_{x\to0}\frac{k+\cos(\sqrt a\,x)}{kx^2} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \frac{-\sqrt a\sin(\sqrt a\,x)}{2kx} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \frac{-\sqrt a\times\sqrt a\,x}{2kx}$

$\frac{-a}{2k}=3 \Rightarrow \frac{a}{k}=-6$

۲

$x \to +\infty \quad x$

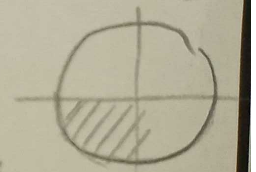
سوال کنکوری

(۹)
$$\lim_{x\to ۳a^+} \frac{۲\sqrt{x-۳a}+۳\sqrt{x}-\sqrt{۲۷a}}{\sqrt{x^۲-۹a^۲}} = \lim_{x\to ۳a^+} \frac{۲\sqrt{x-۳a}}{(\sqrt{x-۳a})(\sqrt{x+۳a})} + \lim_{x\to ۳a^+} \frac{۳(\sqrt{x}-\sqrt{۳a})}{(\sqrt{x-۳a})(\sqrt{x+۳a})}$$

$$\lim_{x\to ۳a^+} \frac{۲}{\sqrt{x+۳a}} + \lim_{x\to ۳a^+} \frac{۳(\sqrt{x-۳a})^۲}{(\sqrt{x-۳a})(\sqrt{x+۳a})(\sqrt{x}+\sqrt{۳a})} = \lim_{x\to ۳a^+} \frac{۲}{\sqrt{x+۳a}} + ۰ = \frac{۲}{\sqrt{۶a}}$$ ۲

(۱۰)
$$\lim_{x\to(-۱)} \frac{۱-k[x]}{x^۲-۱} = -\infty \qquad \lim_{x\to(-۱)^+} \frac{۱+k}{\cancel{x^۲-۱}\ (x-۱)(x+۱)} = -\infty \qquad ۱+k > ۰ \quad k > -۱$$

$[x] = -۱$



$-۱ < k < -\frac{۱}{۲}$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} \frac{۱+۲k}{(x-۱)(x+۱)} = -\infty \Rightarrow ۱+۲k < ۰ \ , \ k < -\frac{۱}{۲} \qquad -\pi < k\pi < -\frac{\pi}{۲}$$

$[x] = -۲$

(ناحیه سوم)

$-۱ < \cos k\pi < ۰$ ۳

ج

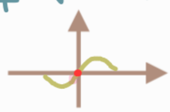
$$x > -\frac{۱}{۲} \to x^{۲} < \frac{۱}{۴} \to \frac{۱}{x^{۲}} > ۴ \to \frac{۳}{x^{۲}} > ۱۲ \rightsquigarrow \left[\frac{۳}{x^{۲}}\right] = ۱۲$$

$$\hookrightarrow -\frac{۲}{x^{۲}} < -۸ \rightsquigarrow \left[-\frac{۲}{x^{۲}}\right] = -۹$$

$$\lim_{x \to (-\frac{۱}{۲})^{+}} \frac{۱۶x + ۹}{۲۴x + ۱۲} = \frac{-۸ + ۹}{-۱۲^{+} + ۱۲} = \frac{۱}{۰^{+}} = \boxed{+\infty}$$

ب

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{۲ + ۳x} - \sqrt{۲ - x}}{\sqrt{۱ - \cos x}} \times \frac{\sqrt{۲ + ۳x} + \sqrt{۲ - x}}{\sqrt{۲ + ۳x} + \sqrt{۲ - x}} \times \frac{\sqrt{۱ + \cos x}}{\sqrt{۱ + \cos x}} =$$



$$\lim_{\to ۰^{-}} \frac{۴x \times \sqrt{۲}}{\sqrt{۱ - \cos^{۲} x}} \times \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \lim_{x \to ۰} \frac{۴\sqrt{۲}\, x}{|\sin x|\, ۲\sqrt{۲}} = ۲ \times \frac{x}{-\sin x} = \boxed{-۲}$$