تکلیف شماره‌ی ۲۰ نگار ثابت

۲۰ ★★★ آفرین

ممنونم خیلی عالی و کامل نوشته بودید!

۱-

$$\lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{2x-5}^{-1}}{x^2+ax+b} = -\infty$$

$x=2$ باید ریشه مضاعف باشد.

$$(x-2)^2 = x^2+ax+b$$

$$x^2-4x+4 = x^2+ax+b$$

$a=-4$ $b=4$ $a+b=0$ جواب

۲

۲-

$$\lim_{x\to \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2+ax+b} = +\infty \qquad \left[\frac{b}{a}\right] = ?$$

۲

$$(x-\sqrt[3]{4})^2 = x^2+ax+b \longrightarrow x^2-2\sqrt[3]{4}\,x+\sqrt[3]{16} = x^2+ax+b$$

$a=-2\sqrt[3]{4}$ $b=\sqrt[3]{16}$

$$\left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{\sqrt[3]{16}}{-2\sqrt[3]{4}}\right] = -1$$ جواب

۳-

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} \frac{[-x]+a}{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}x+a\right|+a} = -\infty \qquad [a] = ?$$

$[-x]+a \longrightarrow a-1$

$a<0 \to a-1<-1$

$$x>\frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow -x<-\frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow [-x]=-1$$

۲

$x=\frac{\sqrt{3}}{3} \to$ ریشه مخرج

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+a\right|+a=0$$

$$\underbrace{\left|\frac{1}{3}+a\right|}_{+}+\underbrace{a}_{-}=0 \qquad a<0$$

چون صورت منفی است پس مخرج باید 0^+ باشد و قدر مطلق باید مثبت برداشته شود.

$$\frac{1}{3}+a+a=0 \longrightarrow 2a=\frac{-1}{3} \longrightarrow a=\frac{-1}{6}$$

$$[a] = \left[\frac{-1}{6}\right] = -1$$

جواب

[illegible]

۴-

$$\lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} \frac{16x-\left[\frac{-2}{x^2}\right]}{24x+\left[\frac{3}{x^2}\right]}$$

$$x>\frac{-1}{2} \to \frac{1}{x}<-2 \to \frac{1}{x^2}>4 \to \frac{-2}{x^2}<-8 \to \left[\frac{-2}{x^2}\right]=-9$$

$$\to \frac{3}{x^2}>12 \to \left[\frac{3}{x^2}\right]=12$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} \frac{\overset{1}{16x+\cancel{9}}}{\underbrace{24x+12}_{0^+}} = +\infty$$ جواب

$$x>\frac{-1}{2} \to 24x>-12$$
$$24x+12>0$$

۵-

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}$$

$$x>2 \to x^3>8 \to [x^3]=8$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} =$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{4}{4+4+4} = \frac{1}{3}$$ جواب

۶-

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to -8} \frac{(x+2)(x+8)}{6(2+\sqrt[3]{x})}$$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{(x+2)\cancel{(\sqrt[3]{x}+2)}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{6\cancel{(\sqrt[3]{x}+2)}}$$

$$= \frac{-6(4+4+4)}{6} = -12$$ جواب

نکته با ...

۷-

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} =$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{2} + 3x - \cancel{2} + x}{\sqrt{1-\cos x}\left(\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}\right)} = \frac{4x}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{1-\cos x}\right)}$$

۲

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \longrightarrow \sqrt{1-\cos x} = \underbrace{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}} = -\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

چون $x<0$ پس قدر مطلق باید منفی برداشته شود.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{4x}{2\sqrt{2} \times \left(-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{4x}{-4\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{4x}{-2x} = -2$$

جواب

کمان به صفر میل می‌کند $\rightarrow \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$

۸-

$$\lim_{x \to 0} \frac{k + \cos(\sqrt{a}\, x)}{kx^2} = 3 \qquad \frac{a}{k} = ?$$

کمان به صفر میل می‌کند $\rightarrow \cos(\sqrt{a}\, x) = 1 - \frac{(\sqrt{a}\, x)^2}{2} = 1 - \frac{ax^2}{2}$

۲

$$\lim_{x \to 0} \frac{k + 1 - \frac{ax^2}{2}}{kx^2} = 3 \xrightarrow{hop} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{2}(2ax)}{2kx} = 3$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-a\cancel{x}}{2k\cancel{x}} = 3 \rightarrow \frac{-a}{2k} = 3 \rightarrow a = -6k$$

$$\frac{a}{k} = \frac{-6k}{k} = -6$$

جواب

نکته مثبت

-۹ $a > 0$

$$\lim_{x\to(3a)^+} \frac{2\sqrt{x-3a}+3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$$

$$\lim_{x\to 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a}}{\sqrt{x^2-9a^2}} + \frac{3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}} = \lim_{x\to 3a^+} 2\sqrt{\frac{x-3a}{(x-3a)(x+3a)}}$$

۲

$$+\frac{3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}} = \boxed{\lim_{x\to 3a^+} 2\sqrt{\frac{1}{x+3a}}} + \boxed{\frac{3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}}$$ صفر

$$\lim_{x\to 3a^+} \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{3a})}{\sqrt{x^2-9a^2}} \times \frac{\sqrt{3a}+\sqrt{x}}{\sqrt{3a}+\sqrt{x}} = \frac{3(x-3a)}{\sqrt{x^2-9a^2}\times(\sqrt{x}+\sqrt{3a})}$$

$$= \frac{3(\cancel{\sqrt{x-3a}})(\underbrace{\sqrt{x-3a}}_{\to 0})}{\cancel{\sqrt{x-3a}}\times\sqrt{x+3a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{3a})} = 0.$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 3a^+} 2\sqrt{\frac{1}{3a+x}} = \frac{2}{\sqrt{6a}}$$ جواب

-۱۰

$$\lim_{x\to -1} \frac{1-k[x]}{x^2-1} = -\infty$$

x^2-1: -1, 1: $+ \mid - \mid +$

در ناحیه سوم قرار دارند.

۲

$x \to -1^+ \longrightarrow x > -1 \to [x] = -1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+k}{\underbrace{x^2-1}_{0^-}} = -\infty \longrightarrow 1+k > 0 \longrightarrow k > -1 \quad \text{I}$$

$$\text{I}\cap\text{II} \longrightarrow \boxed{-1 < k < \frac{-1}{2}}$$

$x \to -1^- \longrightarrow x < -1 \to [x] = -2$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1+2k}{\underbrace{x^2-1}_{0^+}} = -\infty \longrightarrow 1+2k < 0 \longrightarrow k < \frac{-1}{2} \quad \text{II} \quad -n < kn < \frac{-n}{2}$$