تکلیف شماره ۲۰ نقطه بابت

۱-

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\overbrace{۲x-۵}^{-۱}}{\underbrace{x^۲+ax+b}}=-\infty$$

$x=۲$ باید ریشه مخرج باشد .

$$(x-۲)^۲=x^۲+ax+b$$

$$x^۲-۴x+۴=x^۲+ax+b$$

$\boxed{a=-۴}$ $\boxed{b=۴}$ $a+b=۰$ جواب

---

۲-

$$\lim_{x\to\sqrt[۳]{۴}}\frac{x}{x^۲+ax+b}=+\infty \qquad \left[\frac{b}{a}\right]=?$$

$$(x-\sqrt[۳]{۴})^۲=x^۲+ax+b\longrightarrow x^۲-۲\sqrt[۳]{۴}\,x+\sqrt[۳]{۱۶}=x^۲+ax+b$$

$\boxed{a=-۲\sqrt[۳]{۴}}$ $\boxed{b=\sqrt[۳]{۱۶}}$

$$\left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{\sqrt[۳]{۱۶}}{-۲\sqrt[۳]{۴}}\right]=\boxed{-۱}$$ جواب

---

۳-

$$\lim_{x\to\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^+}\frac{[-x]+a}{\left|\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+a\right|+a}=-\infty \qquad [a]=?$$

$[-x]+a\longrightarrow \boxed{a-۱}$

$\longrightarrow a<۰\longrightarrow a-۱<-۱$

$$x>\frac{\sqrt{۳}}{۳}\longrightarrow -x<-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\longrightarrow [-x]=-۱$$

$x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\longrightarrow$ ریشه مخرج $\left|\frac{\sqrt{۳}}{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)+a\right|+a=۰$

$$\underbrace{\left|\frac{۱}{۳}+a\right|}_{+}+\underbrace{a}_{-}=۰ \qquad \boxed{a<۰}$$

چون صورت منفی است پس مخرج باید $۰^+$ باشد و قدر مطلق باید مثبت برداشته شود .

$$\frac{۱}{۳}+a+a=۰\longrightarrow ۲a=\frac{-۱}{۳}\longrightarrow \boxed{a=\frac{-۱}{۶}}$$

$$[a]=\left[\frac{-۱}{۶}\right]=\boxed{-۱}$$

جواب

[illegible]

۴-

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+}\frac{۱۶x-[\frac{-۲}{x^۲}]}{۲۴x+[\frac{۳}{x^۲}]}$$

$$x>\frac{-۱}{۲}\to\frac{۱}{x}<-۲\longrightarrow\frac{۱}{x^۲}>۴\longrightarrow\frac{-۲}{x^۲}<-۸\to[\frac{-۲}{x^۲}]=-۹$$

$$\hookrightarrow\frac{۳}{x^۲}>۱۲\longrightarrow[\frac{۳}{x^۲}]=۱۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^+}\frac{۱۶x+\overset{۱}{\cancel{۹}}}{\underbrace{۲۴x+۱۲}_{۰^+}}=\boxed{+\infty}$$ جواب

$$x>\frac{-۱}{۲}\to ۲۴x>-۱۲$$

$$\boxed{۲۴x+۱۲>۰}$$

---

۵-

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}$$

$$x>۲\longrightarrow x^۳>۸\to[x^۳]=۸$$

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)}=$$

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{x+۲}{x^۲+۲x+۴}=\frac{۴}{۴+۴+۴}=\boxed{\frac{۱}{۳}}$$ جواب

---

۶-

$$\lim_{x\to-۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)(x+۸)}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})}$$

$$=\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)\cancel{(\sqrt[۳]{x}+۲)}(\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{۶\cancel{(\sqrt[۳]{x}+۲)}}$$

$$=\frac{-۶(۴+۴+۴)}{۶}=\boxed{-۱۲}$$ جواب

نکته با

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}=$$ —۷

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{۲}+۳x-\cancel{۲}+x}{\sqrt{1-\cos x}\left(\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}\right)}=\frac{۴x}{۲\sqrt{۲}\left(\sqrt{1-\cos x}\right)}$$

$$1-\cos x=۲\sin^۲\frac{x}{۲}\longrightarrow\sqrt{1-\cos x}=\underbrace{\sqrt{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}}=-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}$$

چون x<۰ پس قدر مطلق باید منفی برداشته شود.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{۴x}{۲\sqrt{۲}\times\left(-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{۴x}{-۴\underbrace{\sin\frac{x}{۲}}_{\frac{x}{۲}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{۴x}{-۲x}=\boxed{-۲}$$

جواب

x به صفر میل می‌کند $\longrightarrow \sin\frac{x}{۲}\sim\frac{x}{۲}$

---

$$\lim_{x\to 0}\frac{K+\cos(\sqrt{a}\,x)}{Kx^۲}=۳\qquad\frac{a}{K}=?$$ —۸

x به صفر میل می‌کند $\longrightarrow \cos(\sqrt{a}\,x)=1-\frac{(\sqrt{a}\,x)^۲}{۲}=1-\frac{ax^۲}{۲}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{K+1-\frac{ax^۲}{۲}}{Kx^۲}=۳\xrightarrow{hop}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{۲}(۲ax)}{۲Kx}=۳$$

$$\longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{-a\cancel{x}}{۲K\cancel{x}}=۳\longrightarrow\frac{-a}{۲K}=۳\longrightarrow\boxed{a=-۶K}$$

$$\frac{a}{K}=\frac{-۶K}{K}=\boxed{-۶}$$

جواب

نکته مثبت

۹ـ

$$\lim_{x\to(۳a)^+}\frac{۲\sqrt{x-۳a}+۳\sqrt{x}-\sqrt{۲۷a}}{\sqrt{x^۲-۹a^۲}}\qquad a>۰$$

$$\lim_{x\to ۳a^+}\frac{۲\sqrt{x-۳a}}{\sqrt{x^۲-۹a^۲}}+\frac{۳\sqrt{x}-\sqrt{۲۷a}}{\sqrt{x^۲-۹a^۲}}=\lim_{x\to ۳a^+}۲\sqrt{\frac{x-۳a}{(x-۳a)(x+۳a)}}$$

$$+\frac{۳\sqrt{x}-\sqrt{۲۷a}}{\sqrt{x^۲-۹a^۲}}=\boxed{\lim_{x\to ۳a^+}۲\sqrt{\frac{۱}{x+۳a}}}+\boxed{\frac{۳\sqrt{x}-\sqrt{۲۷a}}{\sqrt{x^۲-۹a^۲}}}$$ صفر

$$\lim_{x\to ۳a^+}\frac{۳(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{\sqrt{x^۲-۹a^۲}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}=\frac{۳(x-۳a)}{\sqrt{x^۲-۹a^۲}\times(\sqrt{x}+\sqrt{۳a})}$$

$$=\frac{۳(\cancel{\sqrt{x-۳a}})\overset{\longrightarrow ۰}{(\sqrt{x-۳a})}}{\cancel{\sqrt{x-۳a}}\times\sqrt{x+۳a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{۳a})}=۰.$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to ۳a^+}۲\sqrt{\frac{۱}{۳a+x}}=\boxed{\frac{۲}{\sqrt{۶a}}}$$ جواب

---

۱۰ـ

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۱-k[x]}{x^۲-۱}=-\infty$$

$x^۲-۱$: $-۱$, $۱$ ; $+$ | $-$ | $+$

در ناحیه سوم قرار دارند.

$$x\to -۱^+ \leadsto x>-۱\to [x]=-۱$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۱+k}{\underbrace{x^۲-۱}_{۰^-}}=-\infty\longrightarrow ۱+k>۰\longrightarrow \boxed{k>-۱}\quad I$$

$$I\cap II\longrightarrow \boxed{-۱<k<\frac{-۱}{۲}}$$

$$x\to -۱^- \leadsto x<-۱\to [x]=-۲$$

$$\lim_{x\to -۱^-}\frac{۱+۲k}{\underbrace{x^۲-۱}_{۰^+}}=-\infty\longrightarrow ۱+۲k\leq ۰\longrightarrow \boxed{k<\frac{-۱}{۲}}\quad II\quad -n<kn<\frac{-n}{۲}$$