

۱۹,۷۵ افرین

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^3} & ; x < 1 \\ b \sqrt[3]{x^3} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow a+1=b \rightarrow b-a=1$$

سوال (۱) تابع پیوسته است پس در $x=1$ مقدار در ضابطه باید برابر شود.

$$\text{شرط مشتق داشتن} \rightarrow 1 = \frac{3x \times b}{3 \sqrt[3]{x^3}} \xrightarrow{x=1} 1 = \frac{3}{3} \times b \rightarrow b = \frac{3}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \rightarrow a+b = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$$

$$f(x) = \frac{|3x-4|}{\sqrt[3]{x^3}} \xrightarrow{x=1} f'(x) = \frac{-2(\sqrt[3]{x^3}) - (\frac{3x}{\sqrt[3]{x^3}})(3-2x)}{3 \sqrt[3]{x^3}} \rightarrow f'(1) = \frac{-2 - (\frac{3}{3})(3-2)}{3} = \frac{-1}{3}$$

سوال (۲)

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^3-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{|x-2| + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^3}} \xrightarrow{x=1} g'(x) = \frac{(-1 + \frac{3}{\sqrt{3x}})(\sqrt[3]{x^3}) - (\frac{3x}{\sqrt[3]{x^3}})(2-x + \sqrt{3x})}{3 \sqrt[3]{x^3}} \rightarrow g'(1) = -1 + \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-10-\sqrt{3}}{3}$$

$$f'(1) - 2g(1) = \frac{-1}{3} + \frac{10+\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} bx+c & ; x < a \\ \frac{1}{x} & ; x \geq a \end{cases}$$

$$\rightarrow ab+c = \frac{1}{a} \rightarrow a^2b+ac=1$$

$$f'(a) = b = -\frac{1}{a^2} \Rightarrow a^2b = -1$$

$$\rightarrow -1+ac=1 \rightarrow ac=2$$

سوال (۳)

$$f(x) = \begin{cases} b & ; x < a \\ b+(x-a)^m & ; x \geq a \end{cases}$$

$$f'_-(a) \neq f'_+(a)$$

سوال (۴) اگر بخواهیم نقطه‌ای نداشته باشیم یعنی باید در نقطه‌ای $x=a$ مشتق چپ درست برابر باشد:

$$\Rightarrow 0 \neq m(x-a)^{m-1} \rightarrow$$

این رابطه فقط در زمانی $m=1$ برقرار است و اگر $m > 1$ باشد $f'(a)$ برابر با صفری شود

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^3-|x^3|}$$

$$g'(-\sqrt[3]{2}) f'(g(-\sqrt[3]{2})) = (f \circ g)'(-\sqrt[3]{2}) = 1$$

سوال (۵)

$$g(-\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{x^3-|x^3|} \xrightarrow{x < 0} \frac{1}{2x^3} \rightarrow f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} \xrightarrow{g(x) < 0} \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$$

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x \times \frac{1}{2x^3}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \Rightarrow (f \circ g)'(x) = 1$$

$$y = -ax - 5$$

$$f'(3) - f(3) = 2 \rightarrow -a + 3a + 5 = 2 \rightarrow 2a = -3 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

سوال (۶)

$$f(3) = -3a - 5 = \frac{9}{2} - 5 = \frac{1}{2}$$

$$f'(3) = -a = \frac{3}{2}$$

$$\frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{x}])^2 + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = -\sqrt[3]{2} \times 42$$

سوال (۷)

$$g'(x) = \frac{-2x}{3 \sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \rightarrow g'(\frac{3}{\sqrt{2}}) = -\sqrt[3]{2} \quad g(\frac{3}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$f'(2) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow \text{استعداد برآورد حسب شکل} \rightarrow [4 + \frac{1}{4}] = 4\frac{1}{4}$$

$$f'(x) = ((x^2+1)') = 2x \rightarrow 2 \times 2 = 4$$

$$\frac{-\sqrt[3]{2} \times 42}{-\sqrt[3]{2} \times \sqrt{2}} = 42$$

$$f'(-1) = \frac{3}{2} \quad g(x) = f(x+1) + f(3x+6) \xrightarrow{x=2} g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4) = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 6$$

سوال (۸)

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

$$f(x) = (x-4)\sqrt{x+3}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a-h) - f'(a-h) + f'(a)}{h(a-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a) - f'(a-h) + f'(a-h) - 2f'(a-h)}{h(a-h)}$$

$$= \frac{f'(a)}{a} + \frac{f'(a) - 2f'(a)}{a} = \frac{f'(a)}{a} = \frac{1}{12} \quad \text{سوال ۹}$$

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + \left(\frac{1}{3\sqrt{x+3}}\right)(x-4) \rightarrow f'(a) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$$

$$y = x^2 - 4x + 5 \rightarrow y' = 2x - 4 \quad \text{خط برشی مماس است} \quad y = -2x + b \quad \text{خط مماس بر این خط}$$

سوال ۱۰

$$4y - 3x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \rightarrow y = -2x + b \rightarrow b = 4 \rightarrow y = -2x + 4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a-h) - 2)(f(a-h) - 1)}{h(a-h)} = -f'(a) \times \frac{(f(a) - 1)}{a}$$

4

$$f'(a) = \sqrt{x+3} + \frac{x-4}{3\sqrt{x+3}} \rightarrow -f'(a) = \left(\sqrt{x+3} + \frac{1}{3\sqrt{x+3}}\right) = 2 + \frac{1}{12} = -\frac{25}{12}$$

$$-\frac{25}{12} \times \frac{2-1}{a} = \boxed{-\frac{a}{12}}$$

$$\text{قریبی مشتق} \rightarrow \frac{f(h) - f(a-h)}{h} = f'(a)$$