۲۰ / ۱۱ الف ۲۲ ۱۸/۵ نارگل قنبری

۱- (صفرِ نقطه مشتق‌ناپذیر باشد)

پیوستگی: $a+1=b$ ⟹

در مشتق: ⟹ $\frac{x}{|x|}=\frac{2b}{3\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x=1} b=\frac{3}{2}$, $a=\frac{1}{2} \to a+b=2$

۲

۲- $g(x)=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ چون می‌خوام مشتق x رو ابدم قدر رو مشخص بر می‌دارم ⟹ $g'(x)=\frac{(-1+\frac{3}{2\sqrt{3x}})(م)-(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})(ص)}{(\sqrt[3]{x^2})^2}$

$f'(x) \xrightarrow[\text{بر می‌دارم}]{\text{قدر رو مشخص}} \frac{(-2)(م)-(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})(ص)}{(\sqrt[3]{x^2})^2} \to \begin{cases} f'(1)=-\frac{10}{3} \\ g'(1)=-3-\frac{4\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

۱/۵

$f'(1)-2g'(1)=4\sqrt{3}-\frac{2}{3}$

۳- پیوستگی: $ba+c=\frac{1}{a}$ ($f_{a^+}=f_{a^-}=f_a$) , مشتق‌پذیری: $b=-\frac{1}{a^2}$ ($f'_+=f'_-$)

⟹ $a(\frac{-1}{a^2})+c=\frac{1}{a} \to c=\frac{2}{a} \to ac=2$

۲

۴- پیوستگی: $\lim_{x\to a^+} f(x)=b$, $f(a)=b+0^m \Rightarrow m\neq 0$

اگر $m\geq 1 \to f(a)=0$ (✓ پیوسته) $(f'_-(a)=0)\neq(f'_+(a)=m(x-a)^{m-1})$

اگر $m=1$ $f'_+=1\neq 0$ ✓ , اگر $m\geq 2$ $f'_+(a)=m\times 0^{m-1}=0=f'_-(a)$ ×

پس فقط یک مقدار $m=1$ قابل قبول است

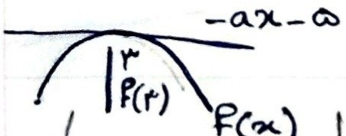
۲

۵- $(f\circ g)'(-\sqrt[3]{2})=?$ ⟹ $f\circ g=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-|x^3|-|x^3-|x^3||}} \xrightarrow{\text{قدر مطلق}} \frac{1}{\sqrt[3]{4x^3}}=\frac{1}{x\sqrt[3]{4}}$

⟹ $(f\circ g)'(x)=\frac{-\sqrt[3]{4}}{(x\sqrt[3]{4})^2} \xrightarrow{x=-\sqrt[3]{2}} \frac{-\sqrt[3]{4}}{4}=-4^{-\frac{2}{3}}$

۱/۵

۶-



$f'(3)=-a \to f(3)=-a-2$

در معادله صدق می‌شه $f(3)$ ⟹ $-a-2=-3a-5 \to a=\frac{-3}{2} \to \begin{cases} f'(3)=\frac{3}{2} \\ f(3)=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{f(3)}{f'(3)}=-\frac{1}{3}$

۲

۷_ $f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}})) \times g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = ?$ $\quad g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = 2 \,,\, g'(x) = \dfrac{-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{(\sqrt[3]{x^2-1})^2}$ $\quad 1{,}75$

$\to x = \frac{3}{\sqrt{8}} \to g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$

$f'(2) \times 8\sqrt{2} = ? \quad \to f(x) = 16x^2 + 1 \to f'(x) = 32x \to f'(2) = 64$

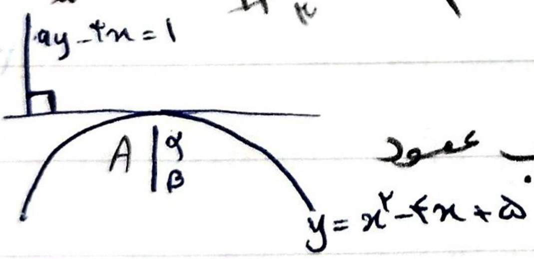
$fog' = 128\sqrt{2} \xrightarrow{\div -128\sqrt{2}} -1$

۸_ $g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10) \xrightarrow{x=-2} f'(-1) + 3\overbrace{f'(4)}^{f'(-1)} = 4$ $\quad 2$

۹_ Hop: $\dfrac{2f(5-h) \times f'(5-h) \times -1 + 3h}{5 - 2h} \xrightarrow{h=0} \dfrac{-2f(5)f'(5)}{5} = ?$

$f(5) = 2 \,,\, f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + (x-4)\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}\right) \xrightarrow{x=5} f'(5) = \frac{25}{12}$ $\quad 1{,}75$

$? = -\frac{4}{5} \times 2 \times \frac{25}{12} = -\frac{5}{3}$



۱۰_ شیب عمود $= \frac{1}{2}$ ⟵ شیب مماس $= -2$

⟵ مشتق در $\alpha = -2$ $\quad 2$

$2\alpha - 4 = -2 \to \alpha = 1 \,,\, \beta = 2 \to A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$

۴

$$f(x) = \frac{۴ - ۲x}{\sqrt[۳]{x^۲}} \to f'(1) = \frac{-۲(\sqrt[۳]{1}) - \frac{۲}{۳}(1)^{-\frac{1}{۳}}(۴-۲)}{\sqrt[۳]{1}} = -\frac{۱۰}{۳}$$

$$g(x) = \frac{|x-۲| + \sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}} \to g'(1) = \frac{\left(-1 + \frac{۳}{۲\sqrt{۳}}\right)(1) - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{1}}(1+\sqrt{۳})}{\sqrt[۳]{1}}$$

$$g'(1) = -1 + \frac{۳\sqrt{۳}}{۶} - \frac{۲}{۳} - \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} = -\frac{۵}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

$$f'(1) - ۲g'(1) = -\frac{۱۰}{۳} + \frac{۱۰}{۳} + \frac{۲\sqrt{۳}}{۶} = \boxed{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$

۵

$$g(\boxed{-\sqrt[۳]{۲}}) = \frac{1}{(-\sqrt[۳]{۲})^۳ - |-\sqrt[۳]{۲}|^۳} = \frac{1}{-۲-۲} = -\frac{1}{۴}$$

$$f\left(-\frac{1}{۴}\right) = \frac{1}{\sqrt[۳]{-\frac{1}{۴} - \frac{1}{۴}}} = \left(-\frac{1}{۲}\right)^{-\frac{1}{۳}} = -(۲)^{-1 \times -\frac{1}{۳}} = -۲^{\frac{1}{۳}} = \boxed{-\sqrt[۳]{۲}}$$

$$\to fog(x) = x$$

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (x)' = 1$$

۷

$$(fog)' = g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) \times f'\left(g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)\right)$$

$$g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = \frac{1}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸} - 1}} = ۲ \to g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) \times f'(۲)$$

$$g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = -\frac{1}{۳}(x^۲-1)^{-\frac{۴}{۳}} \times ۲x = \frac{۶}{\sqrt{۸}} \times -\frac{1}{۳} \times \left(\frac{۹}{۸} - 1\right)^{-\frac{۴}{۳}} = -\frac{۲}{\sqrt{۸}} \times (۲^{-۳})^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$= -\frac{۲^۵ \times \sqrt{۲}}{۴} = -۸\sqrt{۸}$$

$$f(x),\ x = ۲ \to f(x) = x[\varepsilon]^۲ + 1 = ۳x^۲ + 1 \to f'(۲) = ۳۲(۲) = ۶۴$$

$$\frac{-۸\sqrt{۲} \times \cancel{۶۴}}{-\cancel{۱۲۸}\sqrt{۲}} = \boxed{۴}$$

۲

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(۵-h)-۲)(f(۵-h)-۱)}{h(۵-h)} = -f'(۵)\times\frac{(f(۵)-۱)}{۵}$$ ۴

$f(۵) = ۲$

$$f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + \frac{x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}} \rightsquigarrow -f'(۵) = -(\sqrt[۳]{۸} + \frac{۱}{۳\times۴}) = ۲+\frac{۱}{۱۲} = -\frac{۲۵}{۱۲}$$

$$-\frac{۲۵}{۱۲}\times\frac{۲-۱}{۵} = \boxed{-\frac{۵}{۱۲}}$$

تعریف مشتق در $f(۵)$ $\rightarrow$ $\frac{f(x)-f(۵-h)}{h} = f'(۵)$