تکلیف شماره ۳ — ۱۷,۷۵ دقت کن :: — محمدشید حمیدی

① تابع در هیچ نقطه‌ای مشتق ناپذیر نیست!

$$F(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} ; & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} ; & x\geq 1 \end{cases} \longrightarrow \text{در } \mathbb{R} \text{ پیوسته} \qquad a+b$$

نقطه‌ای که تابع در آن مشتق ناپذیر است در ضابطه اول یعنی $x=0$ است که مشخص است!

$$F'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2}} ; & x<1 \longrightarrow x=1 \to \dfrac{2}{2}=1 \\ \dfrac{b\times 2x}{3\sqrt[3]{x^4}} ; & x\geq 1 \longrightarrow \dfrac{2b}{3}=\dfrac{1}{1} \to 2b=3 \to b=1.5 \end{cases}$$

۲

$$\text{در } \mathbb{R} \text{ پیوسته است} \Rightarrow \boxed{a+1=b} \xrightarrow{b=1.5} a=0.5 \Rightarrow a+b=1.5+0.5=2$$

②

$$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$$

$$F(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad F'(1)-2g'(1)=?$$

$$F'(x)=\frac{2(\sqrt[3]{x^2})-(\cancel{|2x-4|})\left(\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)}{(\sqrt[3]{x^2})^2} \longrightarrow F'(1)=\frac{2-\frac{4}{3}}{1}=\frac{6}{3}-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}(1+\sqrt{3})$$

$$g'(x)=\frac{\left(1+\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}\right)\left(\cancel{\sqrt[3]{x^2}}\right)-\left(\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)\left(|x-2|+\sqrt{3x}\right)}{(\sqrt[3]{x^2})^4} \Rightarrow g'(1)=\frac{1+\frac{3}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1}$$

$$1+\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{3\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{2-\sqrt{3}}{6}$$

$$F'(1)-2g'(1)=\frac{2}{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

③

$$F(x)=\begin{cases} bx+c ; & x<a \\ \dfrac{1}{x} ; & x\geq a \end{cases} \quad \text{در } \mathbb{R} \text{ مشتق‌پذیر} \qquad ac=?$$

تابع در ℝ مشتق‌پذیر ⟵ تابع در ℝ پیوسته

$$\text{پیوستگی} \to x=a \longrightarrow \frac{ab+c}{1}=\frac{1}{a} \xrightarrow{*} a\times\frac{-1}{a^2}+c=\frac{1}{a} \to c=\frac{2}{a}$$

$$ac=2$$

$$\text{مشتق‌پذیری} \to F'(x)=\begin{cases} b ; & x<a \\ \dfrac{-1}{x^2} ; & x>a \end{cases} \longrightarrow b=\frac{-1}{a^2} \quad *$$

۲

۴

$$F(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ b+(x-a)^m & ; x\geq a \end{cases}$$

$(a,b) \to$ گوشه $\qquad m\geq 0$

$\to$ فقط F در a مشتق ناپذیر است

۱٫۵

$$F'(x)=\begin{cases} 0 & ; x<a \\ m(x-a)^{m-1} & ; x\geq a \end{cases} \longrightarrow \cancel{x=a} \to 0=m(\cancel{a-a})^{m-1}$$

۵

$F(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{x^3-|x^3|}$ $\qquad x<0 \longrightarrow$ تعریف شده باشد

$g'(-\sqrt[3]{2})\,F'(g(-\sqrt[3]{2}))=?$ $\qquad x<0$

$\sqrt[3]{2x} \qquad x<0$

۱٫۵

$$g(-\sqrt[3]{2})=\frac{1}{2\cancel{x^3}-2}=-\frac{1}{4}$$

$$g'(x)=\frac{0-(1)(3x^2-|3x^2|)}{(x^3+|x^3|)^2} \to \frac{-\cancel{6x^2}}{\cancel{4x^4}x}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

$F'(-\frac{1}{4})=?$

$$F'(x)=\frac{0-1\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x)^2}}\right)}{(\sqrt[3]{2x})^2}=\frac{-\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}=\frac{-2\times\sqrt[3]{16}}{3}\times\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=-4$$

۶

$y=-ax-5$ $\qquad x=3$ $\qquad F(2)-F(3)=2$ $\qquad \dfrac{F(3)}{F'(3)}=?$

۱٫۵

شیب $\to -a=F'(3)$

$\to x=3 \to y=-3a-5=F(3)$

$$-a-(-3a-5)=2$$

$$\cancel{-a}+\overset{2a}{\cancel{3a}}+5=2 \to 2a=-3 \to a=\frac{-3}{2}$$

$$\frac{F(3)}{F'(3)}=\frac{-3\times\frac{-3}{2}-5}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{10}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{-19}{\cancel{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}=\frac{-19}{3}$$

۷

$F(x)=(x[x^2+\frac{1}{4}])^2+1$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ $\qquad \dfrac{Fog'(\frac{3}{\sqrt{8}})}{-128\sqrt{4}}=?$ $\qquad \frac{9}{8}$

۱٫۵

$Fog'(x)=g'(x)+F'(\cancel{g(x)})$ $\quad 2$

$\to F'(2)=?$

$F'(x)=2(x[\cancel{x^2}+\frac{1}{4}])([x^2+\frac{1}{4}])$

$2\cancel{x}(8)(4)=64$

$$g'(x)=\frac{-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{}=\frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{2x}\to\frac{\frac{24}{4}}{\frac{6}{\sqrt{8}}}=\frac{24\sqrt{8}}{24\times 4}=\frac{\sqrt{8}}{8}$$

$\frac{256+\sqrt{4}}{8}$

$$\frac{\frac{64+\sqrt{8}}{8}}{-128\sqrt{4}}=\frac{\frac{512+2\sqrt{4}}{8}}{-128\sqrt{4}}=\frac{512+2\sqrt{4}}{8\times-128\sqrt{4}}$$

$$g(\frac{3}{\sqrt{8}})=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-\frac{8}{8}}}=2$$

۸

$F'(-1)=\frac{3}{2}$ $\qquad g(x)=F(x+1)+F(3x+10)$ $\qquad g'(-2)=?$

چون دو رو تشبوب نداشت
پس مشتق ها باید مساوی
برابره

$\Downarrow$

$F'(4)=\frac{3}{2}$

$g'(x)=F'(x+1)+3F'(3x+10)$

بدی $g'(-2)=\underbrace{F'(-1)}_{\frac{3}{2}}+3F'(4)\ \frac{3}{2}=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=\frac{12}{2}=6$

۲

۹

$F(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}$ $\qquad \lim_{h\to 0}\frac{F^2(5-h)-3F(5-h)+2}{h(5-h)}$

$F(5)=\sqrt[3]{8}=2$

$\lim_{h\to 0}\frac{(F(5-h)-1)(F(5-h)-\cancel{2})}{h\,\cancel{(5-h)}\,5}$ $\quad F(5)$

تعریف مشتق $\quad \cancel{1,12}$

$F'(x)=\sqrt[3]{x+3}+(\cancel{x-4})\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}\right)$

بدی $F'(5)=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$

$\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{F(5)}^2-1)(F'(5))}{5}=\frac{\frac{25}{12}}{\frac{5}{1}}=\frac{25}{5\times 12}=\frac{5}{12}$

۱۰

$y=x^2-4x+5$ $\qquad 4y-3x=1\longrightarrow$ بر آن عمود!

$\longrightarrow 4y=3x+1\longrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$

شیب خط مماس (-2)

عکس و قرینه

$y'=2x-4$

$\longrightarrow 2x-4=-2\longrightarrow 2x=2\longrightarrow x=1$

در این نقطه از منحنی

۲

۴

نقطه گوشه‌ای $\rightarrow f_{+}(a) = f_{-}(a)$

$m=0 \rightarrow$ مشتق هر ۲ ثابت است ✗

$m=1 \rightarrow f'_{-}(a) = 0 \quad , \quad f'_{+}(a) = 1$ ✓ $\longrightarrow \boxed{m=1}$

$\geq ۲ \rightarrow f'_{-}(a) = 0 \quad , \quad f'_{+}(a) = m(\underbrace{x-a}_{a-a=0})^{m-1}$ ✗

۵

$$g(-\sqrt[۳]{۲}) = \frac{1}{(-\sqrt[۳]{۲})^{۳} - |-\sqrt[۳]{۲}|^{۳}} = \frac{1}{-۲-۲} = -\frac{1}{۴}$$

$$f(-\frac{1}{۴}) = \frac{1}{\sqrt[۳]{-\frac{1}{۴}-\frac{1}{۴}}} = (-\frac{1}{۲})^{-\frac{1}{۳}} = -(۲)^{-1\times -\frac{1}{۳}} = -۲^{\frac{1}{۳}} = -\sqrt[۳]{۲}$$

$\rightarrow f\circ g(x) = x$

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (x)' = 1$$

۶

$f(۳) = -۳a - ۵ \qquad f'(۳) = -a \qquad -۳(-\frac{۳}{۲}) - ۵ = -\frac{1}{۲}$

$$-a - (-۳a - ۵) = ۲ \rightarrow ۲a = ۳ \rightarrow a = -\frac{۳}{۲} \rightarrow \frac{f(۳)}{f'(۳)} = \frac{-\frac{1}{۲}}{-\frac{۳}{۲}} = \frac{1}{۳}$$

$$(fog)' = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \times f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)$$ ۷

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}} = 2 \rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \times f'(2)$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = \frac{6}{\sqrt{8}} \times -\frac{1}{3} \times \left(\frac{9}{8}-1\right)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{8}} \times (2^{-3})^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -\frac{2^5 \times \sqrt{2}}{4} = -8\sqrt{2}$$

$$f(x),\ x=2 \rightarrow f(x) = x[\varepsilon]^2 + 1 = 3x^2+1 \rightarrow f'(2) = 32(2) = 64$$

$$\frac{-8\sqrt{2} \times \cancel{64}}{-1\cancel{28}\sqrt{2}} = \boxed{4}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(5-h) - 2)(f(5-h) - 1)}{h(5-h)} = -f'(5) \times \frac{(\overset{2}{f(5)} - 1)}{5}$$ ۹

$$f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + \frac{x-4}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \rightsquigarrow -f'(5) = -\left(\sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\times 4}\right) = 2 + \frac{1}{12} = -\frac{25}{12}$$

$$-\frac{25}{12} \times \frac{2-1}{5} = \boxed{-\frac{5}{12}}$$

تعریف مشتق
در $f(5)$ $\rightarrow \dfrac{f(h) - f(5-h)}{h} = f'(5)$