تکلیف شماره ۳۲ مهشید حمیدی

① تابع فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است!

$$F(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & ; x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\geq 1 \end{cases} \longrightarrow$$ در R پیوسته $\quad a+b$

← نقطه‌ای که تابع در آن مشتق‌ناپذیر است در صورت سوال یعنی $x=0$ مشخص است!

$$F'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2}} & ; x<1 \longrightarrow x=1 \rightarrow \dfrac{2}{2}=1 \\ \dfrac{b\times 2x}{3\sqrt[3]{x^4}} & ; x\geq 1 \longrightarrow \dfrac{2b}{3}=\dfrac{1}{1} \rightarrow 2b=3 \rightarrow b=1/5 \end{cases}$$

در R پیوسته است $\Rightarrow \boxed{a+1=b} \xrightarrow{b=1/5} a=0/5 \Rightarrow a+b=1/5+0/5=2$

②

$$F(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad F'(1)-2g'(1)=?$$

$$\sqrt{x^2-4x+4}\rightarrow\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$$

$$F'(x)=\frac{2(\sqrt[3]{x^2})-(|2x-4|)\left(\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)}{(\sqrt[3]{x^2})^2} \longrightarrow F'(1)=\frac{2-\frac{4}{3}}{1}=\frac{6}{3}-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}(1+\sqrt{3})$$

$$g'(x)=\frac{\left(1+\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}\right)(\sqrt[3]{x^2})-\left(\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)\left(|x-2|+\sqrt{3x}\right)}{(\sqrt[3]{x^2})^2} \Rightarrow g'(1)=\frac{1+\frac{3}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1}$$

$$1+\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{3\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{2-\sqrt{3}}{6}$$

$$F'(1)-2g'(1)=\frac{2}{3}-\frac{2+\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

③

$$F(x)=\begin{cases} bx+c & ; x<a \\ \dfrac{1}{x} & ; x\geq a \end{cases}$$ در R مشتق‌پذیر $\quad ac=?$

تابع در R مشتق‌پذیر $\longrightarrow$ تابع در R پیوسته

پیوستگی تابع $\rightarrow x=a \longrightarrow \dfrac{ab+c}{1}=\dfrac{1}{a} \xrightarrow{*} a\times\dfrac{-1}{a^2}+c=\dfrac{1}{a} \rightarrow c=\dfrac{2}{a}$

$ac=2$

مشتق‌پذیری $\rightarrow F'(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ \dfrac{-1}{x^2} & ; x>a \end{cases} \longrightarrow b=\dfrac{-1}{a^2}$ *

۴

$$F(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ b+(x-a)^m & ; x\geq a \end{cases}$$

(a,b) — گوشه $m \geq 0$

← همیشه F در a مشتق‌ناپذیر است

$$F'(x)=\begin{cases} 0 & ; x<a \\ m(x-a)^{m-1} & ; x\geq a \end{cases} \longrightarrow x=a \to 0=m(\cancel{a-a})^{m-1}$$

۵

$F(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ $\sqrt[3]{2x}$ $x<0$

$g(x)=\dfrac{1}{x^3-|x^3|}$ $x<0$ ← تعریف شده باشد

$g'(-\sqrt[3]{2})\, F'(g(-\sqrt[3]{2}))=?$ $x<0$

$g'(x)=\dfrac{0-(1)(3x^2-|3x^2|)}{(x^3+|x^3|)^2} \to \dfrac{-\cancel{6x^2}}{\cancel{4x^4}x}=\dfrac{-3}{2\sqrt[3]{2}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

$g(-\sqrt[3]{2})=\dfrac{1}{2x^3}=-\dfrac{1}{4}$

$F'(-\frac{1}{4})=?$

$F'(x)=\dfrac{0-1\left(\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x)^2}}\right)}{(\sqrt[3]{2x})^2}=\dfrac{\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}=\dfrac{-2\times\sqrt[3]{16}}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}=-4$

۶

$y=-ax-5$ $x=3$ $F(4)-F(3)=2$ $\dfrac{F(3)}{F'(3)}=?$

شیب $-a=F'(3)$

$x=3 \to y=-3a-5=F(3)$

$-a-(-3a-5)=2$

$\cancel{-a}+\cancel{3a}^{2a}+5=2 \to 2a=-3 \to a=\dfrac{-3}{2}$

$\dfrac{F(3)}{F'(3)}=\dfrac{-3\times\frac{-3}{2}-5}{\frac{3}{2}}=\dfrac{\frac{9}{2}-\frac{10}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{\frac{-19}{\cancel{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}=\dfrac{-19}{3}$

۷

$F(x)=(x[x^2+\frac{1}{4}])^2+1$ $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ $\dfrac{Fog'(\frac{3}{\sqrt{8}})}{-128\sqrt{4}}=?$ $\frac{9}{8}$

$Fog'(x)=g'(x)+F'(\cancel{g(x)})$ 2

$F'(2)=?$

$F'(x)=2(x[\cancel{x^2+\frac{1}{4}}]^{4})([x^2+\frac{1}{4}])$

$2\cancel{(8)}^{16}(4)=64$

$g'(x)=\dfrac{-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\dots}=\dfrac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{2x}\to\dfrac{3\frac{1}{4}}{\frac{6}{\sqrt{8}}}=\dfrac{3\sqrt{8}}{4\times 6}=\dfrac{\sqrt{8}}{8}$

$\dfrac{256+\sqrt{8}}{8}$

$\dfrac{\dfrac{64+\sqrt{8}}{8}}{-128\sqrt{4}}=\dfrac{\dfrac{512+\sqrt{8}}{8}}{-128\sqrt{4}}=\dfrac{512+\sqrt{8}}{8\times-128\sqrt{4}}$

$g(\frac{3}{\sqrt{8}})=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-\frac{8}{8}}}=2$

(8)

$F'(-1)=\frac{3}{2}$ $\qquad g(x)=F(x+1)+F(3x+10)$ $\qquad g'(-2)=?$

چون دوره تناوب ۵ است
پس مشتق ها باهم مساوی
برابرند

$\Downarrow$

$F'(4)=\frac{3}{2}$

$g'(x)=F'(x+1)+3F'(3x+10)$

در $g'(-2)=F'(-1)+3F'(4)$ $\quad F'(-1)=\frac{3}{2}$, $F'(4)=\frac{3}{2}$ $\quad =\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=\frac{12}{2}=6$

---

(9)

$F(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}$

$F(5)=\sqrt[3]{8}=2$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F^2(5-h)-3F(5-h)+2}{h(5-h)}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(F(5-h)-1)(F(5-h)-\cancel{2}\ F(5))}{h\,(\cancel{5-h})\,5}$

تعریف مشتق

$F'(x)=\sqrt[3]{x+3}+(\cancel{x-4})\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(\cancel{x+3})^2}}\right)$

در $F'(5)=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\cancel{F(5)}^{2}-1)(F'(5))}{5}=\dfrac{\frac{25}{12}}{\frac{5}{1}}=\dfrac{\cancel{25}\,5}{\cancel{5}\,12}=\dfrac{5}{12}$

---

(10)

$y=x^2-4x+5$ $\qquad 6y-3x=1\longrightarrow$ بر این عمود!

$\longrightarrow 6y=3x+1\longrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$

کسر و قرینه

شیب خط عمود (-2)

$y'=2x-4$

$\longrightarrow 2x-4=-2\longrightarrow 2x=2\longrightarrow x=1\longrightarrow$

در این نقطه از منحنی