سوال ۱

۱۷

$$f(x) = \begin{cases} a - x & x < 1 \\ \sqrt[3]{x^2}\, b & x \geq 1 \end{cases}$$

۱,۵

$$-1 = \frac{2}{3\cancel{\sqrt[3]{x}}_{1}}\, b \rightarrow \boxed{-\frac{3}{2} = b}$$

$$a - 1 = b \rightarrow a - 1 = -\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$a + b = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

سوال ۲

$f'(1) \rightarrow 2(1) - 4 = -2 \rightarrow$

$f(x) = \frac{4-2x}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2(\sqrt[3]{x^2}) - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(4-2x)}{(\sqrt[3]{x^2})^2}$

$f'(x) = \frac{-2\sqrt[3]{x^2} - \frac{2(4-2x)}{3\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}$

$f'(1) = \frac{-2-\frac{4}{3}}{1}$

$f'(1) = -\frac{10}{3}$

منفی شو

$g(x) = \frac{|x-2| + \sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x^2}} \quad \frac{(2-x)+\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\left(-1 + \frac{2}{2\sqrt{2x}}\right)(\sqrt[3]{x^2}) - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(-x+2+\sqrt{2x})$

$\left(-1 + \frac{2}{2\sqrt{2}}\right)(1) - \frac{2}{3}(+1+\sqrt{2})$

$-1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$ ۱,۵

$-\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$ ؟

$-\frac{10}{3} - 2\left(-\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ ؟

سوال ۳

$$\boxed{ab + c = \frac{1}{a}}$$

$$b = -\frac{1}{a^2} \rightarrow -a^2 b = 1 \rightarrow \boxed{b = -1}$$

$$\boxed{a = \pm 1} \leftarrow \boxed{a^2 = 1}$$

$$-a + c = \frac{1}{a} \rightarrow \boxed{c = \frac{a^2 + 1}{a}}$$

۲

$$ac \rightarrow \frac{a^2+1}{\cancel{a}} \times \cancel{a} = a^2 + 1 \rightarrow 1 + 1 = 2$$

$- 1 + 1$

سوال

$g(x) = \frac{1}{x^3 - (-x^3)} \rightarrow \frac{1}{2x^3}$

$x \rightarrow -2\sqrt{2}$

[illegible]

$g'(x) = \frac{-6x^2}{(2x^3)^2} = -\frac{3}{2x^4}$

$g'(-2\sqrt{2}) = \frac{-3}{2(-2\sqrt{2})^4} = \frac{-3}{2\cdot 2\sqrt{16}}$

$g(-2\sqrt{2}) = \frac{1}{2(-2\sqrt{2})^3} = -\frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x - (-x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$

$f'(x) = \frac{\frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}}}{\sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{16x^4}}$

2

$f'(g(-2\sqrt{2})) = f'(-\tfrac{1}{4}) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{16 \times \frac{1}{256}}} = \frac{-2\sqrt[3]{16}}{3}$

$-\frac{3}{2\sqrt[3]{16}} \times \frac{-2\sqrt[3]{16}}{3} = 1$

سوال ۲

$y = -ax - ۵$

$f'(۳) - f(۳) = ۲$

$f'(۳) = -a$

$f'(۳) = -۳a - ۵$

$f'(۳) - f(۳) = ۲ \qquad -a - (-۳a - ۵) = ۲ \rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$

$\frac{f(۳)}{f'(۳)} = \frac{-۳a - ۵}{-a} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۱}{۳}$

۲

$(f\circ g)'(\frac{۲}{\sqrt{۳}}) = g'(\frac{۲}{\sqrt{۳}})\, f'(g(\frac{۲}{\sqrt{۳}}))$ ادامه

$$g(\frac{۲}{\sqrt{۳}}) = \frac{1}{\sqrt[۳]{(\frac{۲}{\sqrt{۳}})^۲ - 1}} = \frac{1}{\sqrt[۳]{\frac{۴}{۳} - 1}} = ۳$$

$$g'(\frac{۲}{\sqrt{۳}})\, f'(۳)$$

$$g'(x) = -\frac{1}{۳}\, ۲x\, (x^۲ - 1)^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$= -\frac{۲}{۳}\, x (x^۲ - 1)^{-\frac{۴}{۳}} = -۸\sqrt{۳}$$

$$\frac{۲}{\sqrt{۳}} \quad \frac{۹}{۸}$$

$$f'(۳) \Rightarrow ۴۳x^۲ + \frac{1}{۳}\, ۳x$$

$$۳x^۲ + \frac{1}{۳}) = ۴$$

$$f(x) = (۴x)^۲ + 1 = ۱۶x^۲ + 1 \Rightarrow f'(x) = ۳۲x$$

$$f'(۳) = ۹۶ \qquad (f\circ g)'(\frac{۲}{\sqrt{۳}}) = -۸\sqrt{۳}(۹۶)$$

$$۴(-۱۹۲\sqrt{۳}$$

$$\frac{۴(-۱۹۲\sqrt{۳})}{۱۹۲\sqrt{۳}} = \boxed{\cancel{-۴۱۹۲\sqrt{۳}}} = ۴$$

سوال ۸

$$g'(x) = f'(x+1) + ۳ f'(۳x+۱۰)$$

$$g'(-۲) = f'(-۱) + ۳ f'(۴) \rightarrow = f'(-۱)$$

طبق دوره تناوب

$$g'(-۲) = ۴ f'(-۱)$$

$$g'(-۲) = \cancel{۴} \times \frac{۹}{\cancel{۴}} = ۹$$

۳

(سوال ۹)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(5-h) - 2f(5-h) + 2}{h(5-h)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2(-1)f(5-h)f'(5-h) - 2(-1)f'(5-h)}{5-2h}$$

هم‌ارزی

$$= \frac{-2f(5)f'(5) + 2f'(5)}{5} \quad \therefore \quad f(5)=2$$

$$f'(x) = (1)(2\sqrt{x+3}) + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}(x-4)$$

$$f'(5) = 2\sqrt{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} \times (5-4) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{-25}{12}$$

$$\frac{-2 \times \frac{25}{12} \times 2 + 2 \times \frac{25}{12}}{5} = \frac{-\frac{25}{12}}{5} = \boxed{-\frac{5}{12}}$$

۲

(سوال ۱۰)

$$9y - 2x = 1$$

$$9y = 2x + 1 \qquad \text{شیب قرینه و معکوس} \to \text{قطع عمود}$$

$$y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{9} \to -\frac{9}{2}$$

مشتق تابع $2x - 4 = -2$ $\qquad 2x = 2 \to \boxed{x = 1}$

$x^2 - 4x + 5$

۲

گلها رستمیان

۱۲ تجربی

۲

$$f(x)=\frac{4-2x}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f'(1)=\frac{-2(\sqrt[3]{1})-\frac{2}{3}(1)^{-\frac{1}{3}}(4-2)}{\sqrt[3]{1}}=-\frac{10}{3}$$

$$g(x)=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow g'(1)=\frac{(-1+\frac{3}{2\sqrt{3}})(1)-\frac{2}{3\sqrt[3]{1}}(1+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{1^4}}$$

$$g'(1)=-1+\frac{3\sqrt{3}}{6}-\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(1)-2g'(1)=-\frac{10}{3}+\frac{10}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱

$$f(x)=\begin{cases} a+|x| & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \rightarrow a+1=b$$

$$f'_+(1)=f'_-(1) \rightarrow b\times\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}=1 \rightarrow b\times\frac{2}{3}=1 \rightarrow b=\frac{3}{2}$$

$$a=b-1 \rightarrow a=\frac{1}{2} \rightarrow a+b=\frac{4}{2}=2$$

نکته: $|x|$ تنها نقطه‌ی مشتق ناپذیر در $x=0$ است (نقطه‌ی گوشه‌ای) پس در ۱ مشتق پذیر است.

۴

نقطه گوشه‌ای $\rightarrow$ $f_{+}(a) = f_{-}(a)$

$m=0 \rightarrow$ مشتق هر ۲ ضابطه ۰ است ✗

$m=1 \rightarrow f'_{-}(a) = 0$ و $f'_{+}(a) = 1$ ✓ $\longrightarrow \boxed{m=1}$

$>۲ \rightarrow f'_{-}(a) = 0$ و $f'_{+}(a) = m(\underbrace{x-a}_{a-a=0})^{m-1}$ ✗