عسل جعفرپور — تکلیف ۲۲ — دوازدهم رشته B — ۲۰ آفرین

۱

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & ;x<1 \Rightarrow a+|x| \\ b\sqrt[3]{x^2} & ;x\geq 1\end{cases}$$

پیوسته $f(1) \Rightarrow a+1=b \quad (I)$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{a+|x|-a}{x}=\frac{x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{a+|x|-a}{x}=\frac{-x}{x}=-1 \Rightarrow f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

در $x=0$ مشتق‌ناپذیر

در نقطه b مشتق‌پذیر $\Rightarrow f'(1)=\begin{cases} f'_+(1)=1 \\ f'_-(1)=\frac{b\times 2(1)}{3\sqrt[3]{(1)}}\end{cases} \Rightarrow 1=\frac{2b}{3} \Rightarrow b=\frac{3}{2} \xrightarrow{(I)} a=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a+b=2}$

۲

۲

$$f(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \xRightarrow{x=1} f(x)=\frac{-(2x-4)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g(x)=\frac{-(x-2)+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f(x)-2g(x)=\frac{-(2x-4)}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{-2(x-2)+2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=-2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow (f(x)-2g(x))'=f'(x)-2g'(x)=\frac{\frac{-2\times 3}{2\sqrt{3x}}\times\sqrt[3]{x^2}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}\times -2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow f'(1)-2g'(1)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

۲

۳

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & ;x<a \\ \frac{1}{x} & ;x\geq a\end{cases}$$

پیوستگی: $ba+c=\frac{1}{a} \Rightarrow ba^2+ca=1$

مشتق‌پذیری: $f'_-(a)=f'_+(a) \Rightarrow b=\frac{-1}{a^2} \Rightarrow ba^2=-1$

$\Rightarrow \boxed{ac=2}$

۲

۴

$$f(x)=\begin{cases} b & ;x<a \\ b+(x-a)^m & ;x\geq a\end{cases}$$

نقطه زاویه‌دار $\Rightarrow f'_+(a)\neq f'_-(a)$ (هر دو متناهی باشند)

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & ;x<a \\ m(x-a)^{m-1}\times 1 & ;x>a\end{cases}$$

$\Rightarrow 0\neq m(a-a)^{m-1}\times 1 \Rightarrow$

$m=1$ تنها یک حالت داشته دیدیم $\Rightarrow f(x)=b+x-a \Rightarrow f'_+(a)=1 \Rightarrow \boxed{\text{انحدار}}$

$m-1<0,\ m\neq 0 \Rightarrow f'_+(a)=\infty$ با شرایط خواسته مسئله مطابق نیست

۲

۵

$$g'(x)f'(g(x))=(f\circ g(x))' \qquad g(x)=\frac{1}{x^3-(-x^3)}=\frac{1}{2x^3}\ ;x<0 \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-(-x)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\ ;x<0$$

$$f\circ g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2\left(\frac{1}{2x^3}\right)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}}=x \Rightarrow (f\circ g(x))'=\boxed{1=(f\circ g(-\sqrt[3]{4}))'}$$

۲

۶

$$y=-ax-5 \Rightarrow \begin{cases} f'(3)=-a \\ f(3)=-3a-5\end{cases} \Rightarrow f'(3)-f(3)=-a-(-3a-5)=2a+5=2 \Rightarrow a=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{f(3)}{f'(3)}=\frac{-3(-\frac{3}{2})-5}{-(-\frac{3}{2})}=\boxed{-\frac{1}{3}}$$

۲

۷

$$f(x)=\left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2+1 \qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \Rightarrow g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}}=2 \Rightarrow f\circ g(x)=\Big(g(x)\underbrace{\left[4+\frac{1}{2}\right]}_{4}\Big)^2+1=16g^2(x)+1$$

$$\Rightarrow (f\circ g(x))'=32g(x).g'(x)=32\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\times\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \Rightarrow \left(f\circ g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)'=\frac{32\times 2\times -2(\frac{3}{\sqrt{8}})}{3\sqrt[3]{(\frac{1}{8})^4}}=\boxed{-512\sqrt{2}} \Rightarrow$$

۴ برابر

۲

۸

$$g(x)=f(x+1)+f(3x+10) \Rightarrow g'(x)=f'(x+1)+f'(3x+10)\times 3 \Rightarrow g'(-2)=f'(-1)+3f'(4)=\underset{-1+5=4}{4f'(-1)}=4\left(\frac{3}{2}\right)=\boxed{6}$$

۹

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{hop}{=}} \frac{-2f(5-h).f'(5-h)+3f'(5-h)}{-2h+5}=\frac{-2(2).(\frac{25}{12})+3(\frac{25}{12})}{5}=\boxed{\frac{-5}{12}}$$

$$f'(x)=\sqrt[3]{x+3}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}\times(x-4) \Rightarrow f'(5)=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$$

$$f(5)=2$$

۲

$$\left.\begin{array}{l} 4y-2x=1 \Rightarrow m=\frac{1}{2} \Rightarrow m'=-2 \\ y'=2x-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-4=-2 \Rightarrow x=1\ ,\ y=2 \Rightarrow \boxed{(1,2)}$$ 10