①

$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1\end{cases}$ $\rightsquigarrow a+\sqrt{x^2}=a+|x|$

در $x=0$ مشتق پذیر نیست؟

در $\mathbb{R}$ پیوسته است $\xrightarrow{x \text{ به سمت } 1}$ $a+1=b$

$y=a+\sqrt{x^2} \to y'=\frac{x}{\sqrt{x^2}} \xrightarrow{x \text{ به سمت } 1} y'=1$

$y=b\sqrt[3]{x^2} \to y'=\frac{2b}{3\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{x \text{ به سمت } 1} y'=\frac{2b}{3}$ ۲

$\frac{2b}{3}=1 \to b=\frac{3}{2} \;,\; a=\frac{1}{2}$ $\boxed{a+b=2}$

---

②

$f(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \to f(x)=\begin{cases}\frac{4-2x}{\sqrt[3]{x^2}} & x<2\\ \frac{2x-4}{\sqrt[3]{x^2}} & x\geq 2\end{cases}$

$\underset{x<2}{f'(x)}=\frac{(-2)(\sqrt[3]{x^2})-(4-2x)(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})}{\sqrt[3]{x^4}} \to f'(1)=\frac{(-2)-(2)(\frac{2}{3})}{1}=\frac{-10}{3}$

$g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $g(x)=\begin{cases}\frac{2-x+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} & x<2\\ \frac{x-2+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} & x\geq 2\end{cases}$

$\underset{x<2}{g'(x)}=\frac{(\frac{3}{2\sqrt{3x}}-1)(\sqrt[3]{x^2})-(2-x+\sqrt{3x})(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})}{\sqrt[3]{x^4}}$

$g'(1)=(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)-(\sqrt{3}+1)(\frac{2}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{5}{3}$

$f'(1)-2g'(1)=\frac{-10}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{10}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲

موضوع   تاریخ / /

۳)

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x\geq a\end{cases}$$

پیوستگی در a $\to ba+c=\frac{1}{a} \to a^2b+ac=1 \to ac=1-a^2b$

۲

مشتق چپ و راست در a برابر $\to b=\frac{-1}{x^2} \xrightarrow{x=a} a^2b=-1 \to ac=1-(-1)=۲$

---

۴) برای گوشه‌ای شدن، مشتق چپ و راست باید متفاوت باشند اما تابع در $x=a$ پیوسته باشد که برقرار است.

$$f'_+(a)=\underbrace{(x-a)^{m-1}}_{=0 \text{ در } m>1}(m)$$

اگر $m>1$ باشد مشتق راست تابع ۰ می‌شود و با مشتق چپ برابر می‌شود.

به ازای $m=1$ $\to f'_+(a)=1$ $m=1$ ✓

۲

پس فقط یک مقدار $m=1$ قابل قبول است.

---

۵)

$g(x)=\frac{1}{2x^3}$ $x\neq 0$ $\to g'(x)=\frac{-3}{2x^4}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$ $x<0$ $\to f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}$

$g(-\sqrt[3]{2})=\frac{-1}{4}$ $g'(-\sqrt[3]{2})=\frac{-3}{2\sqrt[3]{16}}$

۱٫۷۵

$f'(-\frac{1}{4})=\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$

$f'(\frac{1}{4})\times g'(-\sqrt[3]{2})=\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}\times\frac{-\cancel{3}}{\cancel{2}\sqrt[3]{16}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}=-\frac{\sqrt[3]{4^2}}{4}$

۶)

$y = -ax \mp 5$

$f(3) = -3a - 5 \qquad f'(3) - f(3) = -a + 3a + 5 = 2$

$f'(3) = -a \qquad 2a + 5 = 2 \to a = \frac{-3}{2}$

۲

$f(3) = \frac{9}{2} - 5 = \frac{-1}{2} \qquad \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3}$

$f'(3) = \frac{3}{2}$

---

۷)

۱٫۵

$(f\circ g)'(x) = g'(x)\, f'(g(x))$

$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 2 \qquad g'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{8\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)}{3} = \sqrt{8} \qquad (f\circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = 64\sqrt{8}$

$f'(2) = 2(4)(4x) = 64 \qquad \frac{64\sqrt{8}}{-128\sqrt{2}} = \frac{128\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = -1$

---

۸)

$g'(-2) = f'(-1) + f'(4) = 2f'(-1) = 3$

۱٫۵

چون دوره تناوب ۵ است $f'(-1) = f'(4)$

---

۹)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \frac{(f(5-h)-1)(f(5-h)-2)}{h(5-h)} \quad f(5)$$

$$= f'(5) \lim \frac{f(5)-1}{5} = \frac{25}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{12}$$

۱٫۷۵

$f' = \cancel{\frac{1}{3}(x+4)^{\frac{-2}{3}}} \; \frac{1}{3}(\sqrt[3]{x+4}) + (x-4)\frac{1}{3}(x+4)^{\frac{-2}{3}}$

تاریخ / / موضوع

۱۰

$6y - 3x = 1$

$6y = 3x + 1 \rightarrow y = \underbrace{\frac{1}{2}}_{m} x + \frac{1}{6}$

$m' = -2$

$y' = 2x - 4 = -2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \quad y = 2$

$\rightarrow (1, 2)$

۹

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f(5-h) - 2)(f(5-h) - 1)}{h(5-h)} = -f'(5) \times \frac{(\overset{2}{f(5)} - 1)}{5}$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + \frac{x-4}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \rightsquigarrow -f'(5) = -(\sqrt[3]{8} + \frac{1}{3 \times 4}) = -(2 + \frac{1}{12}) = -\frac{25}{12}$$

$$-\frac{25}{12} \times \frac{2-1}{5} = \boxed{-\frac{5}{12}}$$

تمرین مشابه

$f(5) = 0 \rightarrow \frac{f(h) - f(5-h)}{h} = f'(5)$

۸

$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$

$\xrightarrow{x=-2} g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4) \xrightarrow{f'(4) = f'(-1)} g'(-2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{3}{2} = \boxed{6}$

۵

$$g(-\sqrt[۳]{۲}) = \frac{1}{(-\sqrt[۳]{۲})^{۳} - |-\sqrt[۳]{۲}|^{۳}} = \frac{1}{-۲-۲} = -\frac{1}{۴}$$

$$f(-\frac{1}{۴}) = \frac{1}{\sqrt[۳]{-\frac{1}{۴}-\frac{1}{۴}}} = (-\frac{1}{۲})^{-\frac{1}{۳}} = -(۲)^{-1\times-\frac{1}{۳}} = -۲^{\frac{1}{۳}} = \boxed{-\sqrt[۳]{۲}}$$

$\rightarrow fog(x) = x$

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (x)' = 1$$

۷

$$(fog)' = g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) \times f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$$

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{1}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-1}} = ۲ \rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) \times f'(۲)$$

$$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = -\frac{1}{۳}(x^{۲}-1)^{-\frac{۴}{۳}} \times ۲x = \frac{۶}{\sqrt{۸}} \times -\frac{1}{۳} \times (\frac{۹}{۸}-1)^{-\frac{۴}{۳}} = -\frac{۲}{\sqrt{۸}} \times (۲^{-۳})^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$= -\frac{۲^{۵} \times \sqrt{۲}}{۴} = -۸\sqrt{۸}$$

$$f(x),\ x = ۲ \rightarrow f(x) = x[\varepsilon]^{۲}+1 = ۳x^{۲}+1 \rightarrow f'(۲) = ۳۲(۲) = ۶۴$$

$$\frac{-۸\sqrt{۲} \times ۶\cancel{۴}}{-\underset{۲}{\cancel{۱۲}}۸\sqrt{۲}} = \boxed{۴}$$