تاریخ / /   تکلیف ۲۲   کیمیا امیری نیا   موضوع

①

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases} \rightsquigarrow a+\sqrt{x^2}=a+|x|$$

در $x=0$ مشتق ‌پذیر نیست

در $\mathbb{R}$ پیوسته است $\xrightarrow{x \text{ به سمت } 1} a+1=b$

$$y=a+\sqrt{x^2} \to y'=\frac{x}{\sqrt{x^2}} \xrightarrow{x \text{ به سمت } 1} y'=1$$

$$y=b\sqrt[3]{x^2} \to y'=\frac{2b}{3\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{x \text{ به سمت } 1} y'=\frac{2b}{3}$$

$$\frac{2b}{3}=1 \to b=\frac{3}{2} \text{ و } a=\frac{1}{2} \qquad \boxed{a+b=2}$$

---

②

$$f(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \longrightarrow f(x)=\begin{cases} \frac{4-2x}{\sqrt[3]{x^2}} & x<2 \\ \frac{2x-4}{\sqrt[3]{x^2}} & x\geq 2 \end{cases}$$

$$\underset{x<2}{f'(x)}=\frac{(-2)(\sqrt[3]{x^2})-(4-2x)\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)}{\sqrt[3]{x^4}} \to f'(1)=\frac{(-2)-(2)(\frac{2}{3})}{1}=\frac{-10}{3}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \quad g(x)=\begin{cases} \frac{2-x+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} & x<2 \\ \frac{x-2+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} & x\geq 2 \end{cases}$$

$$\underset{x<2}{g'(x)}=\frac{\left(\frac{3}{2\sqrt{3x}}-1\right)(\sqrt[3]{x^2})-(2-x+\sqrt{3x})\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$g'(1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)-(\sqrt{3}+1)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{5}{3}$$

$$f'(1)-2g'(1)=\frac{-10}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{10}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

③
$$f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x\geq a \end{cases}$$

پیوستگی در a $\rightarrow ba+c=\frac{1}{a} \rightarrow a^2b+ac=1 \rightarrow ac=1-a^2b$

مشتق چپ در a با راست در برابر $\rightarrow b=\frac{-1}{x^2} \xrightarrow{x=a} a^2b=-1 \rightarrow ac=1-(-1)=2$

---

④ برای اینکه شکسته مشتق چپ و راست باید متفاوت باشند اما تابع در $x=a$ پیوسته باشد که برقرار است.

$f'_+(a)=\underbrace{(x-a)^{m-1}}_{\text{در } m>1 \;=0}(m)$

اگر $m>1$ باشد مشتق راست تابع ۰ می‌شود و با مشتق چپ برابر می‌شود.

به ازای $m=1 \rightarrow f'_+(a)=1$ $\quad m=1$ ✓

پس متقابلاً مقدار $m=1$ قابل قبول است

---

⑤ $g(x)=\frac{1}{2x^3}$ $\quad x\neq 0 \rightarrow g'(x)=\frac{-3}{2x^4}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$ $\quad x<0 \rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}$

$g(-\sqrt[3]{2})=\frac{-1}{4}$ $\quad g'(-\sqrt[3]{2})=\frac{-3}{4\sqrt[3]{16}}$

$f'(\frac{-1}{4})=\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$

$f'(\frac{1}{4})\times g'(-\sqrt[3]{2})=\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}\times\frac{-\cancel{3}}{\cancel{4}\sqrt[3]{16}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{-\sqrt[3]{4^2}}{4}$

⑥ $y = -ax + ۵$

$f(۳) = -۳a - ۵ \qquad f'(۳) - f(۳) = -a + ۳a + ۵ = ۲$

$f'(۳) = -a \qquad ۲a + ۵ = ۲ \to a = \frac{-۳}{۲}$

$f(۳) = \frac{۹}{۲} - ۵ = \frac{-۱}{۲} \qquad \frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{-۱}{۳}$

$f'(۳) = \frac{۳}{۲}$

---

⑦ $(f \circ g)'(x) = g'(x)\, f'(g(x))$

$g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}} = ۲ \qquad g'(x) = \frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$

$g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = \frac{۸\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)}{۳} = \sqrt{۸} \qquad (f \circ g)'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = ۶۴\sqrt{۸}$

$f'(۲) = ۲(۴)(۴x) = ۶۴ \qquad \frac{۶۴\sqrt{۸}}{-۱۲۸\sqrt{۲}} = \frac{۱۲۸\sqrt{۲}}{-۱۲۸\sqrt{۲}} = -۱$

---

⑧ $g'(-۲) = f'(-۱) + f'(۴) = ۲f'(-۱) = ۳$

محور تقارن ۱٫۵ است $f'(-۱) = f'(۴)$

---

⑨ $\lim_{h \to 0} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} = \frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}$ $f(۵)$

$= f'(۵) \lim \frac{f(۵)-۱}{۵} = \frac{۲۵}{۱۲} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۵}{۱۲}$

$f' = \cancel{\frac{۲}{۳}(۲x+۴)^{۳}} \quad \frac{۱}{۲}(\sqrt[۳]{x+۴}) + (x-۴)^{\frac{۱}{۳}}(x+۴)^{\frac{-۲}{۳}}$

۱۰

$2y - 3x = 1$

$2y = 3x + 1 \rightarrow y = \underbrace{\frac{1}{2}}_{m}x + \frac{1}{2}$

$m' = -2$

$y' = 2x - 4 = -2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \quad y = 2$

$\rightarrow (1, 2)$