Subject :
Year: Month: Day:

۱۸۱۵

سارا عبداللهی

۱) $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2} & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته، در یک نقطه مشتق ناپذیر $a+b$ ؟

$x=0$ در دامنه نیست

$\frac{2b}{3\sqrt[3]{x}}$ $\quad \frac{2}{3}bx^{-\frac{1}{3}} \leftarrow bx^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}$

$a+1=b$

۱٫۷۵

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad f'_{x\to 1^+}(x) = f'_{x\to 1^-}(x)$

$x = \frac{2b}{3\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{x=1} 1 = \frac{2b}{3} \rightarrow b = \frac{3}{2} \qquad a = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$a+b=2$

۲) $f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ باشد، مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ ؟

$f_{x\to 1}(x) = \frac{-2x+4}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad g_{x\to 1}(x) = \frac{|x-2| + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-x+2+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x) = \frac{-2\sqrt[3]{x^2} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}(-2x+4)}{(\sqrt[3]{x^2})^2} \xrightarrow{x=1} \frac{-2 - \frac{2}{3}(2)}{1} = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{6}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$

۱٫۵

$g'(x) = \frac{\left(-1 + \frac{3}{2\sqrt{3x}}\right)(\sqrt[3]{x^2}) - \left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)(-x+2+\sqrt{3x})}{(\sqrt[3]{x^2})^2} \xrightarrow{x=1} \frac{-1 + \frac{3}{2\sqrt{3}} - \left(\frac{2}{3}\right)(1+\sqrt{3})}{1}$

$-\frac{10}{3} - \frac{-3+\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = -5 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

۳) $f(x) \begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x\geq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. ac ؟

$-\frac{1}{a}$

$ba+c = \frac{1}{a}$

$b = \frac{-1}{x^2} \rightarrow b = \frac{-1}{a^2} \rightarrow ba = -\frac{1}{a}$

۲

$c = \frac{2}{a} \rightarrow ac = 2$ ✓

NOTEBOOK POOYA

Subject :
Year: Month: Day:

۴) به ازای چند مقدار صحیح نامنفی m ، (a,b) یک نقطه‌ی گوشه ای برای منحنی است؟

$$f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a \end{cases}$$

$f'(x) \rightarrow 1+m(x-a)^{m-1}(1)$

$m=1$ باشد اگر بیشتر مشتق پذیر می‌شه در نقطه

فقط اگر در اعداد نامنفی؟

۲

۵) فرض اگر $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^3-|x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$

$(f(g(x)))' = fog'$

$$fog=\frac{1}{(\sqrt[3]{x-|x|})^3-|(\sqrt[3]{x-|x|})^3|}=\frac{1}{x-|x|-|x-|x||}\xrightarrow{x=-\sqrt[3]{2}}\frac{1}{4x}$$

$-|x-|x||$

$x-(-x)-|x-(-x)|$

$2x-|2x| \rightarrow 2x-(-2x)=$

$$\frac{0(4x)-4(1)}{(4x)^2}=$$

$$\frac{-4}{16x^2}=\frac{-1}{4x^2}\xrightarrow{x=-\sqrt[3]{2}}\frac{-1}{+4\sqrt[3]{2}}$$

۱٫۲۵

۶) خط $y=-ax-5$ در نقطه‌ای به طول ۳ بر عودار تابع f مماس است اگر

$f'(3)-f(3)=2$

$f'(3)=-a$ $\quad f(3)=-3a-5$

$f(3)$ چند برابر $f'(3)$؟

$-a+3a+5=2$ $\quad 2a=-3$

$a=-\frac{3}{2}$

$f(3)=-3\left(\frac{-3}{2}\right)-5$

$\frac{9}{2}-\frac{10}{2}=\frac{-1}{2}$ $\quad f'(3)=-\frac{3}{2}$

$$\frac{f(3)}{f'(3)}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{-3}$$

$f'(3)=-a=-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

۱٫۲۵

Subject :
Year: Month: Day:

۷) فرض کنید $f(x)=\left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{3}{\sqrt{8}}$ چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-\frac{8}{8}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ $\quad x=2 \longrightarrow (4x)^2+1=16x^2+1$

$(f(g(x)))'=g'(x).f'g(x)$ $\quad f'(x)=32x \longrightarrow f'(2)=64$

$g'(x)=\frac{\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \longrightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{\frac{-4}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{4}}=\frac{-16}{\sqrt{2}}=-8\sqrt{2}$

۲

$(fog)'=\frac{-8\sqrt{2}\times 64}{-128\sqrt{2}}=4$

$-128\sqrt{2}$

۸) تابع $f=5$ ، f مشتق‌پذیر ، $f'(-1)=\frac{3}{2}$ ، $g(x)=f(x+1)+f(3x+10)$

$g'(-2)=?$ $\quad f'(-1)=f'(4)$

$g'(x)=f'(x+1)+3f'(3x+10)$

$g'(-2)=f'(-1)+3f'(4)$

$g'(-2)=\frac{3}{2}+3\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3+9}{2}=\frac{12}{2}=6$

۲

۹) اگر $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}$

$5h-h^2$
$-2h+5$

Hop $\quad \frac{2f(5-h)(-1)f'(5-h)+3f(5-h)f'(5-h)}{-2h+5}=\frac{-2f(5)f'(5)+3f(5)f'(5)}{5}$

$\frac{f(5)f'(5)}{5}=\frac{2\times\frac{25}{12}}{5}=\frac{25}{5\times 6}=\frac{5}{6}$

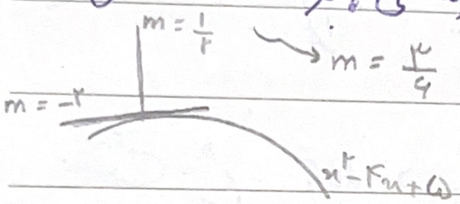
۱٫۷۵

$f(5)=2$

$f'(x)=\sqrt[3]{x+3}+\frac{(x-4)}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \Rightarrow f'(5)=2+\frac{1}{3(4)}=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$

Subject : .... Year: Month: Day:

۱۵) کدام نقطه از منحنی $y = x^2-4x+5$، خط مماس بر منحنی، بر $4y-3x=1$ عمود است؟ ۲



$\rightsquigarrow m = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$$2x-4 = -2$$
$$2x = 2 \quad x = 1 \quad y = 1-4+5 = 2$$
$$(1,2)$$

۱

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \rightsquigarrow \boxed{a+1=b} \qquad f(x) = \begin{cases} a+|x| & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \rightsquigarrow b \times \frac{2x}{3\sqrt[3]{x}} = 1 \to b \times \frac{2}{3} = 1 \to \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

$$a = b-1 \to a = \frac{1}{2} \rightsquigarrow a+b = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

بخاطر $|x|$ تنها نقطه‌ی مشتق ناپذیر در $x=0$ است (نقطه‌ی گوشه‌ای) پس در ۱ مشتق‌پذیر است.

۲

$$f(x) = \frac{4-2x}{\sqrt[3]{x^2}} \to f'(1) = \frac{-2(\sqrt[3]{1}) - \frac{2}{3}(1)^{-\frac{1}{3}}(4-2)}{\sqrt[3]{1}} = -\frac{10}{3}$$

$$g(x) = \frac{|x-2| + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \to g'(1) = \frac{(-1 + \frac{3}{2\sqrt{3}})(1) - \frac{2}{3\sqrt[3]{1}}(1+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{1^4}}$$

$$g'(1) = -1 + \frac{3\sqrt{3}}{6} - \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(1) - 2g'(1) = -\frac{10}{3} + \frac{10}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

۵

$$g(-\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{(-\sqrt[3]{2})^3 - |-\sqrt[3]{2}|^3} = \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

$$f(-\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}} = (-\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{3}} = -(2)^{-1\times-\frac{1}{3}} = -2^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2}$$

$\rightarrow f \circ g(x) = x$

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (x)' = 1$$

۴

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(5-h) - 2)(f(5-h) - 1)}{h(5-h)} = -f'(5) \times \frac{(f(5) - 1)}{5}$$

۲

$$f'(5) = \sqrt[3]{x+3} + \frac{x-4}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \rightsquigarrow -f'(5) = -(\sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\times 4}) = 2 + \frac{1}{12} = -\frac{25}{12}$$

$$-\frac{25}{12} \times \frac{2-1}{5} = \boxed{-\frac{5}{12}}$$

تعریف مشتق در ۵

$$\rightarrow \frac{f(h) - f(5-h)}{h} = f'(5)$$