

۲۰. افزایش

۱۹۱

$$f(m) = \begin{cases} a + \sqrt{m^2} & m < 1 \\ b \sqrt[3]{m^2} & m \geq 1 \end{cases}$$

تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است پس مقدار تابع در چپ و راست تابع در نقطه‌ای با هم برابرند
 $\rightarrow a+1=b$

در سبک داخل قدرمطلق $|m|$ یعنی m مشتق پذیر نیست
 پس در $m=1$ باید مشتق یخیز باشد
 $f'(m) = \begin{cases} 1 & m < 1 \\ \frac{2}{3} b m^{-\frac{1}{3}} & m \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{m=1} \begin{cases} 1 \\ \frac{2}{3} b \end{cases} \rightarrow \frac{2}{3} b = 1 \rightarrow b = \frac{3}{2}$
 $a+1 = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow a+b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

$f(m) = \frac{|2m-4|}{\sqrt[3]{m^2}} \quad g(m) = \frac{|m-2| + \sqrt{3}m}{\sqrt[3]{m^2}} \quad (f(m) - 2g(m))'$

۲

$$f(m) - 2g(m) = \frac{|2m-4|}{\sqrt[3]{m^2}} - \frac{|2m-4| + 2\sqrt{3}m}{\sqrt[3]{m^2}} = \frac{-2\sqrt{3}m}{\sqrt[3]{m^2}} = -2\sqrt{3} m^{\frac{1}{3}}$$

$$= -2\sqrt{3} m^{-\frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} +2\sqrt{3} m^{-\frac{5}{3}} \xrightarrow{m=1} \frac{2\sqrt{3}}{3} (1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۳
 برای مشتق پذیر بودن f در $\mathbb{R}$ اولاً باید در نقطه‌ای مرزی یعنی a پیوسته و دوماً در همین نقطه مشتق پذیر باشد.

$$f(m) = \begin{cases} b m + c & m < a \\ \frac{1}{m} & m \geq a \end{cases}$$

① $ab+c = \frac{1}{a} \xrightarrow{\times a} a^2b+ac=1 \quad \text{(شرط پیوسته بودن)} \quad \textcircled{A} \quad -1+ac=1$
 $\downarrow$
 $\textcircled{B} \quad b = \frac{-1}{a^2} \xrightarrow{\times a^2} a^2b = -1 \quad \text{(شرط مشتق پذیر بودن)} \quad \textcircled{B} \quad ac=2$

۴

$$f(m) = \begin{cases} b & m < a \\ b + (m-a)^m & m \geq a \end{cases}$$

نقطه گوشه ای: نقطه‌ای که تابع در آن پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست با هم برابر نباشد (مشتق پذیر نباشد)
 نقطه زاویه دار
 نقطه گوشه ای: $m=1$ (با مقدار)
 $f'_+(a) \neq f'_-(a) \rightarrow m(m-a)^{m-1} \neq 0$
 $m=a \quad m(m-a)^{m-1} = 0$ پس معادله $m > 2$ به ازای $m=1$ فقط به ازای $m=1$ است تابع در این نقطه نقطه گوشه ای دارد.
 و تابع در $m=a$ تعریف نشده و ناپیوسته می‌شود.
 اگر $m=0$ $f = \begin{cases} b & m < a \\ b+1 & m \geq a \end{cases}$ که پیوسته نیست.
 (صورت تابع f و g به ازای $m < 0$ تعریف نشده می‌شوند.)

۵

$$f(m) = \frac{1}{\sqrt[3]{m-|m|}} \quad g(m) = \frac{1}{m^3 - |m^3|} \rightarrow f(m) = \frac{1}{\sqrt[3]{2m}} \quad g(m) = \frac{1}{2m^3}$$

$$f \circ g'(m) = g'(m) \cdot f'(g(m)) = (f \circ g(-\sqrt[3]{2}))' \rightarrow f \circ g(m) = \frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot \frac{1}{2m^3}}} = m$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} (f \circ g(m))' = 1$$

به ازای $a=3$ نقطه ای بدست می آید که هم روی خط مماس به منحنی و هم روی منحنی قرار دارد پس

$$f(3) = -3a - 5$$

همچنین مشتق تابع f به عنوان سبب این خط محسوب می شود.

$$f'(m) = -a \rightarrow f'(3) = -a$$

$$f'(3) - f(3) = 2 \rightarrow -a - (-3a - 5) = 2 \rightarrow 2a + 5 = 2 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= +\frac{9}{2} - 5 = -\frac{1}{2} \\ f'(3) &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \boxed{-\frac{1}{3}} \checkmark$$

$$f(m) = (m[m^2 + \frac{1}{m}])^{2+1}$$

$$g(m) = \frac{1}{\sqrt[m]{m^2-1}} \rightarrow g'(m) = \frac{2m}{m^2 \sqrt[m]{(m^2-1)^{m+1}}}$$

$$(f \circ g(m))' = g'(m) \times f'(g(m))$$

$$\rightarrow (m^2-1)^{-\frac{1}{m}} \rightarrow -\frac{1}{m^2} (m^2-1)^{-\frac{1}{m}-1} (2m)$$

$$g'(\frac{3}{\sqrt{14}}) = -\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{14}}} \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{14}}} \times \frac{3}{\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}} \times 14 \times \frac{3}{\sqrt{14}} = -8\sqrt{2}$$

$$g(\frac{3}{\sqrt{14}}) = \frac{1}{\sqrt[\frac{3}{\sqrt{14}}]{\frac{9}{14}-1}} = 2 \rightarrow f'(2) \rightarrow f(m) = 14m^2 + 1 \rightarrow f'(m) = 28m \rightarrow f'(2) = 56$$

$$(f \circ g)'(\frac{3}{\sqrt{14}}) = -8\sqrt{2} \times 56 = (-128\sqrt{2}) \times 4 \rightarrow \frac{(-128\sqrt{2}) \times 4}{-128\sqrt{2}} = \boxed{4} \checkmark$$

$$g(m) = f(m+1) + f(3m+10) \rightarrow g'(m) = f'(m+1) + 3f'(3m+10)$$

چون f تابعی متناوب با دوره تناوب 5 است پس $f'(-1) = f'(4) = f'(9) = \dots$

$$\xrightarrow{m=-2} g'(-2) = \underbrace{f'(-1)}_{\frac{3}{2}} + \underbrace{3f'(4)}_{3 \times \frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = \boxed{6} \checkmark$$

$$f(m) = (m-4) \sqrt[m]{m+3} \rightarrow f(5) = 2 \rightarrow f'(m) = 1 \times \sqrt[m]{m+3} + (m-4) \times \frac{1}{m^2 \sqrt[m]{(m+3)^{m+1}}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(5-h) - 2)(f(5-h) - 1)}{h} = \frac{f(5) - 1}{5} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$f'(5) = 1 \times 2 + 1 \times \frac{1}{12} = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$$

$$\rightarrow -f'(5) \times \frac{1}{5} = -\frac{25}{12} \times \frac{1}{5} = \boxed{-\frac{5}{12}}$$

$$f(m) = y = am^2 - 4m + 5 \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} f'(m) = 2am - 4$$

سبب خطه $4y - 3m = 1$ بر این $\frac{3}{4} = \frac{1}{y}$ است پس
سبب خط مماس بر این -2 است $f'(m) = -2$
یعنی $m = -2$

$$4y - 3m = 1 \xrightarrow{\text{سبب}} \frac{-a}{b} = \frac{3}{4} = \frac{1}{y}$$

$$2am - 4 = -2 \rightarrow 2m = 2 \rightarrow m = 1 \rightarrow f(1) = 1 - 4 + 5 = 2 \rightarrow \boxed{(1, 2)}$$

چون این نقطه روی منحنی قرار دارد