تمرین‌ها

۱۴ آذر

Subject:　　　　Date: / /

①

$$f(x) = \begin{cases} a+\sqrt{x^2} & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases} \qquad a+\sqrt{x^2} = b\sqrt[3]{x^2} \xrightarrow{x=1} a+1=b$$

۲

$$f'_{+}(1) = f'_{-}(1) \Rightarrow 1 = \frac{2}{3} b x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow 1 = \frac{2}{3} b \Rightarrow b = \frac{3}{2} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$a+b = 2$$

---

②

$$f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f(x) = \frac{4-2x}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad g(x) = \frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2-x+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{(-2)\sqrt[3]{x^2} - (\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})(4-2x)}{(\sqrt[3]{x^2})^2} \rightarrow f'(1) = \frac{-2\times 1 - \frac{2}{3}\times 2}{1} = \frac{-2-\frac{4}{3}}{1} = \frac{-10}{3}$$

$$g'(x) = \frac{(-1+\frac{3}{2\sqrt{3x}})(\sqrt[3]{x^2}) - (\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})(2-x+\sqrt{3x})}{(\sqrt[3]{x^2})^2} = -1+\frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$-1+\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{-5}{3} \; \frac{-\sqrt{3}}{6} = g'(1)$$

۲

$$f'(1) - 2g'(1) = \frac{-10}{3} + \frac{10}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Subject.   Date. / /

۳

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \dfrac{1}{x} & x\geq a \end{cases} \qquad f'_{+}(a)=f'_{-}(a), \quad f_{+}(a)=f_{-}(a)$$

$\dfrac{1}{a}=ba+c$, $b=\dfrac{-1}{a^2} \Rightarrow ba^2=-1$ *

$ba^2+ca=1$ * , $-1+ca=1 \Rightarrow ca=2$

۲

۴

$$f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a \end{cases} \qquad f'_{-}(a)\neq f'_{+}(a) \Rightarrow$$

۲

$0 \neq m(x-a)^{m-1}(x-a)'$

در هر صورت برابر صفر می‌شود به غیر از زمانی که $m=1$

۵

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ $g(x)=\dfrac{1}{x^3-|x|^3}=\dfrac{1}{2x^3} \Rightarrow \dfrac{3}{2x^4}=g'(x)$

$fog \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-|x^3|-|x^3|+x^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2(x^3-|x^3|)}}=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{4}}$ $fog'=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4x^2}$

$g'(-\sqrt[3]{2}) \times fog'(-\sqrt[3]{2})=\dfrac{3}{4\sqrt[3]{2}} \times \dfrac{\sqrt[3]{4}}{8\sqrt[3]{2}}=$

۱,۷۵

Subject: Date: / /

$f'(۲) = -a \quad f(۳) = -۳a - ۵$ ۵

$-a + ۳a + ۵ = ۲ \rightarrow ۲a = -۳ \rightarrow a = \frac{-۳}{۲} \longrightarrow f(۳) = \frac{۹}{۲} - ۵ = \frac{-۱}{۲}$

$\frac{f(۳)}{f'(۲)} = \frac{-۱}{۲} \times \frac{-۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$

۱٫۵

(۷)

$(fog)' \Rightarrow f'(g) \times g'(x) \Rightarrow \underbrace{\frac{-1}{3}(x^2-1)^{\frac{-4}{3}}}_{g'(x)} \times \underbrace{f'(2)}_{f'(g)} =$

$f'(g(\frac{3}{x})) = f'(2)$

۱٫۵

$(x^2-1)^{\frac{-4}{3}} \times \frac{-1}{3} \times 3 \cdot 2x \rightarrow \frac{16 \times \frac{-1}{3} \times 46}{-128\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

---

(۸)

$g(x) = f(x+1) + f(3x+10) \rightarrow g'(-3) = f'(-1) + 3f'(4) \rightarrow$

$g'(-3) = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

۲

$f'(-1) = \frac{3}{2}$

دوره‌تناوب ۵ $\rightarrow f'(4) = \frac{3}{2}$

---

(۹)

$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3}$ $\qquad f(5) = 2$ $\qquad -f'(5)$ $\quad f(5)$

$\lim_{h \to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} \Rightarrow \frac{(f(5-h)-1)(f(5-h)-2)}{h(5-h)}$

۲

$\frac{-(2-1)f'(5)}{5} = -\frac{f'(5)}{5}$

$f'(x) = (\sqrt[3]{x+3}) + (x-4)(\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}}) = f'(5) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$

$\frac{25}{12} \times \frac{-1}{5} = \frac{-5}{12}$

Subject :

Date : / /

$۶y - ۳x = ۱ \to ۶y = ۳x + ۱ \to y = \frac{1}{۲}x + \frac{1}{۶} \to$ ۱/۵

خط عمود بر $\Rightarrow -۲x + b = y \to$ شیب

۲

$y = x^۲ - ۴x + ۵ \to ۲x - ۴ = y' \to ۲x - ۴ = -۲ \to x = ۱$

$y = x^۲ - ۴x + ۵ \xrightarrow{x=۱} y = ۲ \to (۱,۲)$

۵

$$g(-\sqrt[۳]{۲}) = \frac{۱}{(-\sqrt[۳]{۲})^{۳} - |-\sqrt[۳]{۲}|^{۳}} = \frac{۱}{-۲-۲} = -\frac{۱}{۴}$$

$$f(-\tfrac{۱}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}}} = (-\tfrac{۱}{۲})^{-\frac{۱}{۳}} = -(۲)^{-۱\times-\frac{۱}{۳}} = -۲^{\frac{۱}{۳}} = \boxed{-\sqrt[۳]{۲}}$$

$\rightarrow fog(x) = x$

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (x)' = ۱$$

۶

$f(۳) = -۳a - ۵ \qquad f'(۳) = -a$

$\boxed{-۳(-\tfrac{۳}{۲}) - ۵ = -\tfrac{۱}{۲}}$

$-a - (-۳a - ۵) = ۲ \rightarrow ۲a = ۳ \rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$

$\rightarrow \frac{\boxed{f(۳)}}{f'(۳)} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{+\frac{۳}{۲}} = \frac{-۱}{۳}$

۷

$$(fog)' = g'(\tfrac{۳}{\sqrt{۸}}) \times f'(g(\tfrac{۳}{\sqrt{۸}}))$$

$$g(\tfrac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}} = ۲ \rightarrow g'(\tfrac{۳}{\sqrt{۸}}) \times f'(۲)$$

$$g'(\tfrac{۳}{\sqrt{۸}}) = -\frac{۱}{۳}(x^{۲}-۱)^{-\frac{۴}{۳}} \times ۲x = \frac{۶}{\sqrt{۸}} \times -\frac{۱}{۳} \times (\tfrac{۹}{۸}-۱)^{-\frac{۴}{۳}} = -\frac{۲}{\sqrt{۸}} \times (۲^{-۳})^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$= -\frac{۲^{۵} \times \sqrt{۲}}{۴} = -۸\sqrt{۸}$$

$f(x),\ x = ۲ \rightarrow f(x) = x[\varepsilon]^{۲} + ۱ = ۳x^{۲} + ۱ \rightarrow f'(۲) = ۳۲(۲) = ۶۴$

$$\frac{-۸\sqrt{۲} \times \cancel{۶۴}}{-\cancel{۱۶}\sqrt{۲}} = \boxed{۴}$$