باران تسلیمی

۱۹,۲۵ آفرین

۱ ـ

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2} & ; \ x < 1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; \ x \geq 1 \end{cases}$$

تابع در $x=0$ مشتق ناپذیر است.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) \rightsquigarrow b\sqrt[3]{x^2} = a + \sqrt{x^2}$$

$$b = a + 1 \to b - a = 1$$

۲

$$f'(1)_{x\to 1^+} = f'(1)_{x\to 1^-} \rightsquigarrow |x| = b \times x^{\frac{2}{3}} \to 1 = b \times \frac{2}{3} \times x^{-\frac{1}{3}}$$

$$1 = \frac{2}{3}b \to b = \frac{3}{2} \qquad \boxed{a + b = 2}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x\to 1} \frac{4-2x}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{x^{\frac{2}{3}}}} \xrightarrow{f'(1)} \frac{-2(x^{\frac{2}{3}}) - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(4-2x)}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{-10}{3} \qquad -2$$

$$g(x) = \frac{|x-2| + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x\to 1} \frac{2 - x + \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow{g'(1)} \frac{\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}\right) - \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(2 - x + \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\Rightarrow \frac{-10 - \sqrt{3}}{6} \longrightarrow f'(1) - 2g'(1) = \frac{-10}{3} - 2\left(\frac{-10-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲

۳-

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & ; x<a \\ \dfrac{1}{x} & ; x\geq a \end{cases} \qquad a\neq 0 \qquad ac?$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \rightarrow ab+c=\frac{1}{a} \longrightarrow a^2b+ac=1$$

$$f'_{x\to a^+}(a) = f'_{x\to a^-}(a) \rightarrow b=\frac{-1}{a^2} \longrightarrow a^2b=-1$$

$$-1+ac=1 \longrightarrow \boxed{ac=2}$$

۲

۴-

$$f(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ b+(x-a)^m & ; x\geq a \end{cases}$$

به ازای چند مقدار صحیح نامنفی m، (a,b) یک نقطه‌ی گوشه‌ای برای تابع است؟

$$f'_{x\to a^+}(a) \neq f'_{x\to a^-}(a)$$

$$f'_-(a)=0 \qquad f'_+(a)\neq 0 \longrightarrow m(x-a)^{m-1}\neq 0 \longrightarrow \boxed{m=1}$$

۲

* به ازای یک مقدار از m

$$\frac{}{3}$$

$$x = -\sqrt[3]{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} \qquad g(x) = \frac{1}{2x^3}$$

-5

7

$$g'(-\sqrt[3]{2}) \times f'(g(-\sqrt[3]{2})) = (fog)'$$

$$fog(-\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}} = x \rightarrow (fog)' = x' = 1$$

$$\cancel{-\frac{30}{9}} \quad \cancel{\frac{4(14+5\sqrt{3})}{9}}$$

۶- در $x=3$ بر f مماس

$$f'(3) - f(3) = 2$$

$f(3)$ چند برابر $f'(3)$ است.

$$y = -ax - 5$$

$$-a = f'(3) = \text{شیب}$$

$$-\begin{cases} -3f'(3) - 5 = f(3) \\ f'(3) - 2 = f(3) \end{cases}$$

$$4f'(3) + 3 = 0$$

$$f'(3) = \frac{-3}{4}$$

$$\frac{-3}{4} - f(3) = 2 \longrightarrow f(3) = \frac{-11}{4}$$

$$\frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{\frac{-11}{4}}{\frac{-3}{4}} = \frac{11}{3}$$ برابر

۱٫۵

$f(x) = \left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2 + 1 \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ — ۷

* مقدار مشتق $\overset{\circ}{fog}$ در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ چند برابر $-128\sqrt{2}$ است؟

۱/۷۵

$(fog)' = g' \times f'(g)$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{\left(\frac{\frac{-3}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{4}}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = \frac{-16}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-16\sqrt{2}}{2} = -8\sqrt{2}$$

$g(x) = 2$

$$f'(2) = (\underbrace{x\left[\tfrac{1}{2}\right]}_{0} + x^3)^2 + 1 \longrightarrow x^6 + 1 \longrightarrow f'(x) = 6x^5 \longrightarrow f'(2) = 6 \times 2^5$$

$$\longrightarrow \frac{-8\cancel{\sqrt{2}} \times 6 \times 2^5}{\cancel{-128}\cancel{\sqrt{2}}} = \boxed{\text{برابر ۱۲}}$$

۸ - $g(x) = f(x+1) + f(3x+10)$, $f'(-1) = \frac{3}{2}$

$g'(-2) = ?$ حاصل

$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$

$g'(-2) = f'(-2+1) + 3f'(-6+10) = f'(-1) + 3f'(4)$

$f'(4) = f'(-1) \to g'(-2) = 4f'(-1) \to 4 \times \frac{3}{2} = 6$

۲

۹ - $-\frac{1}{5}\lim_{t\to 0}\frac{f(5+t)-f(5)}{t} = -\frac{1}{5}f'(5)$

$f'(5) = \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{25}{12}$ $\quad -\frac{1}{5}f'(5) = -\frac{1}{5}\times\frac{25}{12} = -\frac{5}{12}$

۲

۱۰ - $6y = 3x+1 \to y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$ $\quad$ شیب $= \frac{1}{2}$

شیب' $= -2$

$y' = 2x - 4 = -2$

$x = 1 \to y = 1 - 4 + 5 = 2$ $\quad \begin{vmatrix} x = 1 \\ y = 2 \end{vmatrix}$

۲

$f(۳) = -۳a - ۵$ $\qquad f'(۳) = -a$ $\qquad -۳(-\frac{۳}{۲}) - ۵ = -\frac{۱}{۲}$ ۶

$-a - (-۳a - ۵) = ۲ \rightarrow ۲a = ۳ \rightarrow a = -\frac{۳}{۲} \rightarrow \frac{f(۳)}{f'(۳)} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{+\frac{۳}{۲}} = -\frac{۱}{۳}$

۷

$(fog)' = g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) \times f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$

$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸} - ۱}} = ۲ \rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) \times f'(۲)$

$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = -\frac{۱}{۳}(x^۲ - ۱)^{-\frac{۴}{۳}} \times ۲x = \frac{۶}{\sqrt{۸}} \times -\frac{۱}{۳} \times (\frac{۹}{۸} - ۱)^{-\frac{۴}{۳}} = -\frac{۲}{\sqrt{۸}} \times (۲^{-۳})^{-\frac{۴}{۳}}$

$= -\frac{۲^۵ \times \sqrt{۲}}{۴} = -۸\sqrt{۸}$

$f(x), x = ۲ \rightarrow f(x) = x[\varepsilon]^۲ + ۱ = ۳x^۲ + ۱ \rightarrow f'(۲) = ۳۲(۲) = ۶۴$

$\frac{-۸\sqrt{۲} \times \cancel{۶۴}}{-\cancel{۱۲۸}_{۲}\sqrt{۲}} = \boxed{۴}$