پارسین زندی

۱۹٫۵

سؤال ۱

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases} \qquad b\,x^{\frac{2}{3}} \qquad a+b=?$$

$$f'_+(x)=\frac{2}{3}b\,x^{-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2b}{3}}{x^{1/3}}=\frac{2b/3}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2b}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'_-(x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2}} \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2}}=\frac{2b}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f(1)=b$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=b \qquad a+1=b$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=a+1 \qquad a-b=-1$$

۱٫۵

سؤال ۲

$$f(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad f'(1)-2g'(1)=?$$

ج)

$$f(1)-2g(1)=\frac{-(2x-4)}{\sqrt[3]{x^2}}-2\times\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-\cancel{2x}+\cancel{4}+\cancel{2x}-\cancel{4}-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

۲

$$=\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt{3}\times x^{1/2}}{x^{2/3}}=-2\sqrt{3}\,x^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow \left(-2\sqrt{3}x^{-1/6}\right)'=-2\sqrt{3}\times\frac{-1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$$

$$\boxed{=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

سؤال ۳

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & ;x<a \\ \frac{1}{x} & ;x\geq a \end{cases} \qquad ac=?$$

ج)

مشتق پذیر R

$$f(a)=\frac{1}{a}$$

$$f'(x)=\begin{cases} b & x<a \\ -\frac{1}{x^2} & x\geq a \end{cases} \qquad f'_+(a)=-\frac{1}{a^2} \Rightarrow f'_+(a)=f'_-(a) \Rightarrow -\frac{1}{a^2}=b$$

$$f'_-(a)=b$$

$$\boxed{a^2b=-1} \quad \text{(I)}$$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

۲

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\frac{1}{a} \qquad \lim_{x\to a^-}f(x)=ab+c \Rightarrow \frac{1}{a}=ab+c \Rightarrow$$

$$\boxed{a^2b+c=1} \quad \text{(II)}$$

$$-1+c=1 \Rightarrow \boxed{c=2}$$

سوال ④

شرط نقطه گوشه‌ای $f'_-(a) \neq f'_+(a)$

$$f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a \end{cases}$$

$$m\geq 2 \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a)=0 \\ f'_+(a)=m(a-a)^{m-1}=0 \end{cases} \Rightarrow f'_-(a)=f'_+(a)$$

ق.ق.غ

$m=0 \rightarrow f'_-(a)=f'_+(a)$ ✗

$m=1 \rightarrow 0=f'_-(a)\neq f'_+(a)=1$ ✓

$\boxed{\text{یک مقدار}}$

۲

سوال ⑤

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} \qquad g(x)=\frac{1}{x^3-|x^3|}$$

$$g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))=?$$

$$(fog)'(-\sqrt[3]{2})=g'(\sqrt[3]{2})\times f'(g(-\sqrt[3]{2})) \Rightarrow x=-\sqrt[3]{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}} \\ g(x)=\frac{1}{2x^3} \end{cases}$$

$$f(g(x))=f\left(\frac{1}{2x^3}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{2x^3}}}=x \Rightarrow (fog)'=(x)'=\boxed{1}$$

۲

سوال ⑥

$$y=-ax-5 \qquad f'(3)-f(3)=2 \qquad \frac{f(3)}{f'(3)}=? \quad \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{-2}{6}=\boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$\left.\begin{aligned} f(3)&=-3a-5 \\ f'(3)&=-a \end{aligned}\right\} f'(3)-f(3)=-a-(-3a-5)=2 \Rightarrow$$

$$\cancel{-a+3a+5=2 \Rightarrow}$$

$$2a+5=2 \Rightarrow 2a=-3 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

$$f(3)=-3\left(-\frac{3}{2}\right)-5=\cancel{\frac{9}{2}-5}=-\frac{1}{2} \qquad \frac{9-10}{2}$$

$$f'(3)=-a=\frac{3}{2}$$

۲

سوال ⑦

$$f(x)=\left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2+1 \qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \qquad fog=? \quad x=\frac{3}{\sqrt{8}} \qquad \frac{fog}{-128\sqrt{2}}=?$$

$$(fog)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$$

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}}=2 \Rightarrow (fog)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\cdot f'(2) \quad \text{(I)}$$

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}\times 2x=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{-2\times\frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{(\frac{1}{8})^4}}=\frac{-16}{\sqrt{2}}=-8\sqrt{2}$$

ادامه سوال ۷

$f(x) = (۴x)^۲ + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۳۲x \Rightarrow f'(۲) = ۶۴$

$\xrightarrow{\text{طبق } I} (f\circ g)'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = -۸\sqrt{۲} \times ۶۴ = -۱۲۸\sqrt{۲} \times ۴$

۲

سوال ۸

$f'(-۱) = \frac{۳}{۲}$ $\qquad f(x+۵) = f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}}$

$g(x) = f(x+۱) + f(۳x+۱۰)$ $\qquad ۱ \times f'(x+۵) = f'(x)$

$g'(-۲) = ?$ $\qquad \Rightarrow f'(x+۵) = f'(x)$

$g(x) = f(x+۱) + f(۳x+۱۰) \rightarrow g'(x) = f'(x+۱) + ۳f'(۳x+۱۰)$

$g'(-۲) = f'(-۲+۱) + ۳f'(-۶+۱۰) = f'(-۱) + ۳f'(۴)$ (I)

$f'(۴) = f'(۴-۵) = f'(-۱) \xrightarrow{\text{طبق } I} g'(-۲) = ۴f'(-۱) = ۴ \times \frac{۳}{۲} = ۶$

۲

سوال ۹

$f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$

$\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} = ? = \lim \frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}$

$= \lim \frac{f(۵-h)-۱}{۵-h} \times \lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۲}{h} = \frac{f(۵-h)-۲}{h} \times \lim \frac{f(۵-h)-۲}{h}$

$= \frac{۲-۱}{۵} \times \lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(۵+(-h)) - f(۵)}{h} = -\frac{۱}{۵} \lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(۵+(-h)) - f(۵)}{-h}$

$= -\frac{۱}{۵} \lim \frac{f(۵+t) - f(۵)}{t} = -\frac{۱}{۵} f'(۵)$

$f'(x) = ۱ \times \sqrt[۳]{x+۳} + \frac{x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$ $\qquad f'(۵) = \sqrt[۳]{۸} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۶۴}} = ۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲}$

$-\frac{۱}{۵} f'(۵) = -\frac{۱}{۵} \times \frac{۲۵}{۱۲} = \boxed{-\frac{۵}{۱۲}}$

۲

سوال ۱۰

$y = x^۲ - ۴x + ۵$

$۶y - ۳x = ۱ \perp \Rightarrow ۶y = ۱ + ۳x \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۶} \Rightarrow \boxed{m \text{ شیب} = \frac{۱}{۲}}$

شیب خط قائم $= -۲ \Rightarrow y' = ۲x - ۴ = -۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = ۱ - ۴ + ۵ = ۲ \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = ۱ \\ y = ۲ \end{cases}}$

۲

1

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \rightsquigarrow \boxed{a+1=b} \qquad f(x)=\begin{cases} a+|x| & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \rightsquigarrow b\times \frac{2x}{3\sqrt[3]{x}} = 1 \to b\times \frac{2}{3} = 1 \to \boxed{b=\frac{3}{2}}$$

$$a=b-1 \to a=\frac{1}{2} \rightsquigarrow a+b=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

ضابطهٔ $|x|$ تنها نقطه‌ی مشتق ناپذیر در $x=0$ است (نقطه‌ی گوشه‌ای) پس در ۱ مشتق‌پذیر است.