مهسا نجاتی / تکلیف ریاضی ۲۲

(۱)

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} \;(|x|) & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} b\,\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x}} & x\geq 1 \\ 1 & 0<x<1 \\ -1 & x\leq 0 \end{cases}$$

در R پیوسته است $\longrightarrow a+1=b$

در نقطه‌ی صفر مشتق پذیر نیست پس در نقطه‌ی ۱ مشتق پذیر است

$\frac{2}{3}b=1 \to b=\frac{3}{2}$

$\hookrightarrow a+1=\frac{3}{2} \to a=\frac{1}{2}$

$a+b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

---

(۲)

$$f(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(1)-2g'(1)=?=(f-2g)'(1)$$

$$g(x)=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad f(x)=\frac{2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f(x)-2g(x)=\frac{2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2|x-2|+2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$\frac{-\cancel{2}\dfrac{3}{\cancel{2}\sqrt{3x}}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)-\left(-2\sqrt{3x}\right)\left(\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x}}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2}=\frac{-\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{3x}}+\dfrac{4x\sqrt{3x}}{3\sqrt[3]{x}}}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2} \xrightarrow{x=1}$$

$$\frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(۳)

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & ; x<a \\ \frac{1}{x} & ; x\geq a \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ \frac{-1}{x^2} & ; x\geq a \end{cases}$$

$$b=\frac{-1}{a^2}$$

$$\to ba+c=\frac{1}{a} \xrightarrow{b=\frac{-1}{a^2}} \left(\frac{-1}{a^2}\right)a+c=\frac{1}{a}$$

$$\to c=\frac{2}{a} \qquad ac=a\times\frac{2}{a}=2$$

---

(۴)

$$f(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ b+(x-a)^m & ; x\geq a \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ m(x-a)^{m-1} & x\geq a \end{cases}$$

که در نقطه ای به طول a مشتق ناپذیر است

$$f'_-(a)=0 \to f'_+(a)\neq 0$$

اگر $m>1$ باشد مشتق راست تابع f در a نیز برابر صفر است و تابع نقطه گوشه ای ندارد

اگر $m=1$ باشد تابع در نقطه ی $x=a$ گوشه ای است

اگر $m=0$ باشد آن گاه $f'_-(a)=f'_+(a)$ و تابع نقطه گوشه ای ندارد

اگر $m<0$ باشد تابع f در $x=a$ تعریف نشده است - پس فقط به ازای $m=1$ تابع نقطه گوشه ای دارد

۵

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x^3-|x^3|}$ $\quad g'(-\sqrt[3]{2})\,f'(g(-\sqrt[3]{2}))$

$(f(g(-\sqrt[3]{2})))'$

$$f(g(x))=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-|x^3|-\left|x^3-|x^3|\right|}}$$

$$f\circ g=\begin{cases}\dfrac{1}{0}\to \text{تعریف نشده} & x\geq 0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x^3}}=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{4}} & x<0\end{cases}\;\to f(g(x))=\frac{1}{x\sqrt[3]{4}}\xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$(f(g(x)))'=\frac{-1}{x^2}\times\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\xrightarrow{x=-\sqrt[3]{2}}\frac{-1}{(-\sqrt[3]{2})^2}\times\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{4}}=\frac{-1}{2\sqrt[3]{2}}$$

۶

$f'(3)-f(3)=2$ $\quad y=\underbrace{-a}_{\text{شیب}}x-5\to\Big|_{3}\,-3a-5$ $\quad \dfrac{f(3)}{f'(3)}=?$

$f'(3)=-a$

$f(3)=-3a-5$

$f'(3)-f(3)=-a+3a+5=2\to 2a=-3\to a=-\dfrac{3}{2}$

$$\frac{f(3)}{f'(3)}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3$$

۷

$f(x)=\left(x\left[x^2+\tfrac{1}{2}\right]\right)^2+1$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ $\quad \dfrac{(f(g(\frac{3}{\sqrt{8}})))'}{-128\sqrt{3}}=?$

$$g'(x)=\frac{-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{(\sqrt[3]{x^2-1})^2}\to g'\!\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{-2\times\frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{\left(\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2-1\right)^4}}=\frac{\frac{-6}{\sqrt{8}}}{\frac{3}{16}}=\frac{-32}{\sqrt{8}}=-4\sqrt{8}=-8\sqrt{2}$$

$$g\!\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=2$$

$f'(x) = 2x([x^2+\frac{1}{2}])^2 \rightarrow f'(2) = 4 \times 16 = 64$

$(f(g(\frac{3}{\sqrt{8}})))' = g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) \times f'(g(\frac{3}{8})) = -8\sqrt{2} \times 64$

$\frac{-8\sqrt{2}\times 64}{-128\sqrt{3}} = 4$

2

8

$f'(-1) = \frac{3}{2} \qquad g(x) = f(x+1) + f(3x+10) \qquad g'(-2) = ?$

$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10) \rightarrow g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4)$

$\xrightarrow{\text{زیرا دوره تناوب ۵ است} = f'(4) = f'(-1)}$ $g'(-2) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$

9

$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3} \rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + (x-4)\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}\right)$

$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{\text{هوپیتال}}$

$\lim \frac{2f(5-h)\,f'(5-h)(-1) - 3f'(5-h)(-1)}{-2h+5} = \frac{-2f(5)\,f'(5) + 3f'(5)}{5} =$

$f(5) = 2 \quad f'(5) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$

$\frac{-2\times 2\times \frac{25}{12} + 3\times \frac{25}{12}}{5} = \frac{-\frac{25}{3} + \frac{25}{4}}{5} = 5\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)_{\frac{-1}{12}} = \frac{-5}{12}$

۱۰

$y = x^2 - 4x + 5$ $\qquad$ $6y - 3x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$

$\hookrightarrow y' = 2x - 4$

$m = \frac{1}{2} \longrightarrow m' = -2 \Longrightarrow 2x - 4 = -2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \ , \ y = 2 \rightarrow (1, 2)$