پریا بختیاروند

۱۷/۵

5

۱

$f(۱) = a + ۱ = b$

$y = a + \sqrt{x^۲} = a + |x|$

$x = ۰$ نقطه‌ی مشتق‌ناپذیر

$y = b\sqrt[۳]{x^۲}$

۱/۵

$\lim_{x \to ۰} \frac{b\sqrt[۳]{x^۲}}{x} = \lim_{x \to ۰} \frac{b}{\sqrt[۳]{x}}$

$\Rightarrow b = ۰$

$\Rightarrow a = -۱ \quad a + b = -۱$

۲

$(f - ۲g)'(x) =$

$\left(\frac{۲|x-۲| - ۲|x-۲| - ۲\sqrt[۳]{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}} \right)'$

$= \left(-۲\sqrt[۳]{۴}\, x^{-\frac{۱}{۳}} \right)' = \frac{۲\sqrt[۳]{۴}}{۳} x^{-\frac{۴}{۳}}$

$\Rightarrow (f - ۲g)'(۱) = \frac{۲\sqrt[۳]{۴}}{۳}$

۳

$ab + c = \frac{۱}{a}$

$f'_-(x) = b$

$f'_+(a) = -\frac{۱}{a^۲}$

$\Rightarrow b = -\frac{۱}{a^۲}$

۲

$\Rightarrow ab = -\frac{۱}{a}$

$-\frac{۱}{a} + c = \frac{۱}{a} \Rightarrow ac = ۲$

۴ یک صفر

$f'_-(x) = ۰$

۱/۵

$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{b + (x-a)^m - b}{x - a} =$

$\lim_{x \to a^+} (x-a)^{m-۱} \Rightarrow m - ۱ < ۰$

$\Rightarrow m < ۱ \Rightarrow \boxed{m = ۰}$

۵

$g(x) = \frac{۱}{۲x^۳}$

$f(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x}} \qquad fog(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲\left(\frac{۱}{۲x^۳}\right)}} = x$

$\Rightarrow (fog)'(۴\sqrt[۳]{۲}) = ۱$

۲

۶

$f(۴) = -۲a - ۵$

$f'(۳) = -a$

$-a - (-۴a - ۵) = ۲ \Rightarrow a = -\frac{۴}{۲}$

۲

$\frac{f(۴)}{f'(۳)} = \frac{\frac{۹}{۲} - ۵}{\frac{۴}{۲}} = -\frac{۱}{۴}$

۷

$(fog)'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) \cdot f'\left(g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)\right) =$

$g\left(\frac{۴}{\sqrt{۸}}\right) = ۲$

$\frac{۲ \times \frac{۴}{\sqrt{۸}}}{۳\sqrt[۳]{\left(\left(\frac{۴}{\sqrt{۸}}\right)^۲ - ۱\right)^۲}} \times ۴۲ \times ۴ = \frac{۲^۹}{\sqrt{۸}}$

۱/۵

$\frac{\frac{۲^۹}{\sqrt{۸}}}{-۱۲۸\sqrt{۴}} = -۱$

۸

$g'(-۲) = f'(-۱) + ۲\,\cancel{f'(۴)}$ $\quad f'(-۱)$

$= ۴$

۲

۹

$\overset{H.P}{=} \frac{-۲f'(۰) + ۳f'(۰)}{۵} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow f'(۰) = ۲$

۱

۱۰

$m = \frac{۱}{۲} \qquad m' = -۲$

$f'(x) = ۲x - ۴ = -۲ \Rightarrow x = ۱ \quad \begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$

۲

۱

$$f(x) = \begin{cases} a+|x| & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \rightsquigarrow \boxed{a+1=b}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \rightsquigarrow b\times \frac{2x}{3\sqrt[3]{x}} = 1 \to b\times \frac{2}{3} = 1 \to \boxed{b=\frac{3}{2}}$$

$$a = b-1 \to a = \frac{1}{2} \rightsquigarrow a+b = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

ضمناً $|x|$ تنها نقطه‌ی مشتق ناپذیر در $x=0$ است (نقطه‌ی گوشه‌ای) پس در ۱ مشتق‌پذیر است.

۴

نقطه‌ی گوشه‌ای $\to f_+(a) = f_-(a)$

$m=0 \to$ مشتق همواره صفر است ✗

$m=1 \to f'_-(a) = 0 \;,\; f'_+(a) = 1$ ✓ $\longrightarrow \boxed{m=1}$

$\geq 2 \to f'_-(a) = 0 \;,\; f'_+(a) = m(\underbrace{x-a}_{a-a=0})^{m-1}$ ✗

۵

$$g(-\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{(-\sqrt[3]{2})^3 - |-\sqrt[3]{2}|^3} = \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

$$f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}} = (-\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}} = -(2)^{-1\times-\frac{1}{3}} = -2^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2}$$

$$\to f\circ g(x) = x$$

$$g'(x)\times f'(g(x)) = (x)' = 1$$

۴

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(۵-h)-۲)(f(۵-h)-۱)}{h(۵-h)} = -f'(۵)\times\frac{(\overset{۲}{f(۵)}-۱)}{۵}$$

$$f'(x)=\sqrt[۳]{x+۳}+\frac{x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^{۲}}} \rightsquigarrow -f'(۵) = -(\sqrt[۳]{۸}+\frac{۱}{۳\times۴}) = ۲+\frac{۱}{۱۲} = -\frac{۲۵}{۱۲}$$

$$-\frac{۲۵}{۱۲}\times\frac{۲-۱}{۵} = \boxed{-\frac{۵}{۱۲}}$$

تمرین مشتق
در $f(۵)$

$$\rightarrow \frac{f(h)-f(۵-h)}{h} = f'(۵)$$

۷

$$(f\circ g)' = g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})\times f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$$

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}} = ۲ \rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})\times f'(۲)$$

$$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = -\frac{۱}{۳}(x^{۲}-۱)^{-\frac{۴}{۳}}\times ۲x = \frac{۶}{\sqrt{۸}}\times -\frac{۱}{۳}\times(\frac{۹}{۸}-۱)^{-\frac{۴}{۳}} = -\frac{۲}{\sqrt{۸}}\times(۲^{-۳})^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$= -\frac{۲^{۵}\times\sqrt{۲}}{۴} = -۸\sqrt{۸}$$

$$f(x),\ x=۲ \rightarrow f(x) = x[\varepsilon]^{۲}+۱ = ۱۶x^{۲}+۱ \rightarrow f'(۲) = ۳۲(۲) = ۶۴$$

$$\frac{-۸\sqrt{۲}\times ۶\cancel{۴}}{-\underset{۲}{\cancel{۱۲}}\,۸\sqrt{۲}} = ۴$$