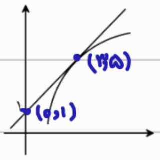
فاطمه امیری   تکلیف شماره: ۲۴   کلاس: دوازدهم دختر B

۱۴٫۷۵

سوال ۱)



شیب خط مماس $= \frac{۵-۱}{۳-۰} = \frac{۴}{۳} \longrightarrow f'(۳) =$ شیب خط مماس $= \frac{۴}{۳}$ ✓ ۲

سوال ۲)

$\longrightarrow y_0 = \sqrt{ax_0-۱}$ *

$f(x) = \sqrt{ax-۱}$ $A(x_0,y_0)$ شیب خط مماس $= \frac{۲-۱}{۲-(-۱)} = \frac{۱}{۳}$ $\xrightarrow{\text{معادله خط}} y = \frac{x+۴}{۳} \longrightarrow y_0 = \frac{x_0+۴}{۳} \xrightarrow{*} \sqrt{ax_0-۱} = \frac{x_0+۴}{۳}$ ①

$f'(x_0) = \frac{a}{۲\sqrt{ax_0-۱}} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{①} \frac{a}{۲\left(\frac{x_0+۴}{۳}\right)} = \frac{۱}{۳} \longrightarrow \frac{۳a}{۲(x_0+۴)} = \frac{۱}{۳} \longrightarrow a = \frac{۲(x_0+۴)}{۹}$ ② $/ ① \rightarrow ax_0-۱ = \left(\frac{x_0+۴}{۳}\right)^۲ \xrightarrow{② \rightarrow ax_0 = \frac{۲x_0(x_0+۴)}{۹}} \frac{۲x_0(x_0+۴)}{۹} - ۱ = \left(\frac{x_0+۴}{۳}\right)^۲$

$\longrightarrow ۲x_0(x_0+۴)-۹ = (x_0+۴)^۲ \longrightarrow ۲x_0 + ۸x_0 - ۹ = x_0^۲ + ۸x_0 + ۱۶ \rightarrow x_0^۲ = ۲۵ \rightarrow x_0 = ۵ \Longrightarrow f(۵) = \frac{x+۴}{۳} = ۳$ ✓

۲

سوال ۳)

$f(x) = \frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$ $۴y-۳x=n \longrightarrow y = \frac{۳}{۴}x + \frac{n}{۴} \xrightarrow{*} x=۱ \rightarrow \frac{۳}{۴} + \frac{n}{۴} = ۱ \Rightarrow n=۱$ ۲

$f'(x) = \frac{(۲x+m)(x+۳)-(x^۲+mx+۱)}{(x+۳)^۲} \Rightarrow f'(۱) = \frac{(۲+m)\times۴-(۲+m)}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \rightarrow (۲+m)(۴-۱) = ۱۲ \rightarrow ۲+m = ۴ \rightarrow m = ۲$ $f(۱) = \frac{x^۲+۲x+۱}{x+۳} = ۱$ *

$\Big\} \rightarrow m+n = ۲+۱ = ۳$ ✓

سوال ۴)

$f(x) = \frac{۲۷-\sin^۳x}{۹-\sin^۲x}$ $g(x) = \frac{۳}{۳+\sin x}$ ۱٫۵

$f(x) = \frac{(۳-\sin x)(۹+\sin^۲x+۳\sin x)}{(۳-\sin x)(۳+\sin x)} \rightarrow f'(x) = \frac{(۲\sin x\cos x+۳\cos x)(۳+\sin x) - \cos x(۹+\sin^۲x+۳\sin x)}{(۳+\sin x)^۲} = \frac{\sin۲x(۳+\sin x)-۹\sin^۲x}{(۳+\sin x)^۲}$

سوال ۵)

$f(x) = \frac{۱}{\sqrt[۵]{x+|x|}}$ $g(x) = \frac{۱}{|x^۵|+x^۵}$ $g'(\sqrt[۵]{۳})\, f'(g'(\sqrt[۵]{۳})) = fog'(\sqrt[۵]{۳}) = ۱$ ۱٫۷۵

$\downarrow x = \sqrt[۵]{۳}$ $\downarrow x = \sqrt[۵]{۳}$

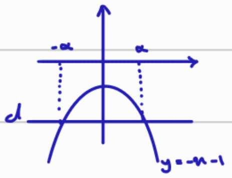
$f(x) = \frac{۱}{\sqrt[۵]{۲x}}$ $g(x) = \frac{۱}{۲x^۵} \longrightarrow fog(x) = \frac{۱}{\sqrt[۵]{۲\,\frac{۱}{۲x^۵}}} = \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = x \longrightarrow fog'(x) = ۱$

سوال ۶)

$f(x) = \left(\frac{\sin x-۱}{\sin x+۱}\right)^۲$ $f(x) = xg(x)+۱ \longrightarrow g(x) = \frac{f(x)-۱}{x} = \frac{-۴\sin x}{x(\sin x+۱)^۲} \Rightarrow \lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{-۴\sin x}{x(\sin x+۱)^۲} = -۴$

$f(x)-۱ = \frac{\sin^۲x-۲\sin x+۱}{\sin^۲x+۲\sin x+۱} - ۱ = \frac{\sin^۲x-۲\sin x+۱-\sin^۲x-۲\sin x-۱}{(\sin x+۱)^۲} = \frac{-۴\sin x}{(\sin x+۱)^۲}$ ✓ ۲

سوال ۷) قرینه‌کمی نسبت به محورها برابر $y=-x^۲-۱$ می‌شود. $f(\alpha) = -\alpha^۲-۱ \Rightarrow f'(\alpha) = -۲\alpha \xrightarrow{f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-۱} (-۲\alpha)(۲\alpha) = -۱ \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۱}{۴} \rightarrow \alpha = \pm\frac{۱}{۲}$



یعنی معادلهٔ خط d به صورت $y=-\frac{۵}{۴}$ است و مبدأ مختصات به فاصلهٔ $\frac{۵}{۴}$ از خط d است ✓ ۲ $f(\alpha) = f(-\alpha) = -\alpha^۲-۱ = -\alpha^۲-۱ = \frac{-۱}{۴} - ۱ = \frac{-۵}{۴}$

سوال ۸)

$f(x) = ۲\sqrt{x}\,(۴x^۲+۳) = ۲x^{\frac{۱}{۲}}(۴x^۲+۳) = ۸x^{\frac{۵}{۲}} + ۶x^{\frac{۱}{۲}} \longrightarrow f'(x) = ۲۰x^{\frac{۳}{۲}} + ۳x^{-\frac{۱}{۲}} \xrightarrow{f(a)=af'(a)} ۸a^{\frac{۵}{۲}} + ۶a^{\frac{۱}{۲}} = a(۲۰a^{\frac{۳}{۲}} + ۳a^{-\frac{۱}{۲}}) = ۸a^{\frac{۵}{۲}} + ۶a^{\frac{۱}{۲}} = ۲۰a^{\frac{۵}{۲}} + ۳a^{\frac{۱}{۲}}$

$\rightarrow ۳a^{\frac{۱}{۲}} = ۱۲a^{\frac{۵}{۲}} \rightarrow ۳ = ۱۲a^۲ \rightarrow a^۲ = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{a>0} a = \frac{۱}{۲} \longrightarrow f'(\frac{۱}{۲}) = ۲۰\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} + ۳\times\sqrt{۲} = \frac{۱۰}{\sqrt{۲}} + ۳\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲} \longrightarrow$ شیب خط d

✓ ۲

سوال ۹) $\bigcirc$ ۰

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-۲x^۲+x+۱}$$

سوال ۱۰) یک برابر $-۴۸\sqrt{۵}$ است

$\bigcirc$ ۱٫۵

$$f(x) = (x[x])^۳ \quad g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} \to fog(x) = \left(\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}\right)^۳ \to fog'(x) = \frac{-۳x}{(x^۲-۱)^۲\sqrt{x^۲-۱}} \to fog'\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right) = \frac{\frac{-۳\sqrt{۵}}{۲}}{\frac{۱}{۱۶}\times\frac{۱}{۲}} = -۴۸\sqrt{۵} \checkmark$$

$$\downarrow x = \frac{\sqrt{۵}}{۲} \in ۱٫۱$$

$$f(x) = x^۳$$

۴

$$۳g - f(x) = \frac{۹}{۳+\sin x} - \frac{(۳-\cancel{\sin x})(۹+\sin^۲ x+۳\sin x)}{(۳-\cancel{\sin x})(۳+\sin x)} = \frac{-\sin x(\cancel{\sin x}+۳)}{\cancel{\sin x}+۳}$$

$$\hookrightarrow -\sin x \xrightarrow{\text{مشتق}} (۳g-f)'(x) = -\cos x \rightsquigarrow -\cos\left(\frac{۵\pi}{۳}\right) = \boxed{-\frac{۱}{۲}}$$

۵

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (fog)'(x)$$

$$x>۰ \longrightarrow g(x) = \frac{۱}{۲x^۵} \longrightarrow f(x) = \frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}} \rightsquigarrow fog(x) = \frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲\left(\frac{۱}{۲x^۵}\right)}}$$

$$fog(x) = -x \longrightarrow fog'(x) = \boxed{-۱} \rightsquigarrow fog'(\sqrt[۵]{۳}) = ۱$$

۶

$$y = mx \longrightarrow \frac{\sqrt{a}}{-۲a^۲+a+۱} = ma \longrightarrow \frac{۱}{-۲a^۲+a+۱} = m\sqrt{a}$$

$$m\sqrt{a}(-۲a^۲+a+۱) = ۱ \longrightarrow -۲m(a^{\frac{۵}{۲}}) + m(a^{\frac{۳}{۲}}) + m(a)^{\frac{۱}{۲}} = ۱ \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$-۵m(a^{\frac{۳}{۲}}) + \frac{۳}{۲}m(a^{\frac{۱}{۲}}) + \frac{m}{۲}(a^{-\frac{۱}{۲}}) = ۰$$

$$\frac{m}{۲}(a^{-\frac{۱}{۲}})(-۱۰a^۲+۳a+۱) = ۰ \longrightarrow a = -\frac{۱}{۵} \text{ یا } a = \frac{۱}{۲} \checkmark \ (a>۰)$$

$$f(a) = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-۲(\frac{۱}{۴})+\frac{۱}{۲}+۱} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱} = \boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

۱۰

$$g(x) = (x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۲}} \longrightarrow g'(x) = -\frac{۱}{۲}(۲x)(x^{۲}-۱)^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right) = -\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵})\left(\frac{۵}{۴}-۱\right)^{-\frac{۳}{۲}} \longrightarrow -\frac{\sqrt{۵}}{۲}\Big(\underset{۸}{\cancel{۲^{-۲(-\frac{۳}{۲})}}}\Big) = -۴\sqrt{۵}$$

$$g\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^{-}\right) = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۵^{-}}{۴}-۱}} = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}^{-}}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}^{-}} = ۲^{+}$$

$$f'(۲^{+}) = ((۲x)^{۳})' = ۲۴x^{۲} = ۲۴ \times ۴$$

$$fog'\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^{-}\right) = -۴\sqrt{۵} \times ۲۴ \times ۴ \xrightarrow{\div -۴۸\sqrt{۵}} \frac{\overset{۲}{\cancel{۲۴}} \times \cancel{۴} \times -۴\sqrt{۵}}{-\cancel{۴۸}\sqrt{۵}} = \boxed{۸}$$