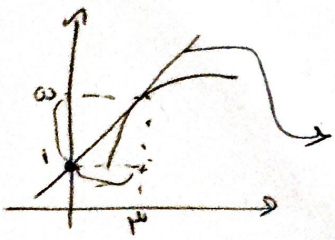
تکلیف ۴۴ — ۱۴,۷۵ — ماشین حساب

(۱)



$F'(۳) = ?$ ⟵ برابر با شیب خط مماس بر نمودار در نقطه ۳ است

$m = \frac{۵-۱}{۳} = \frac{۴}{۳}$ ✓ ⟵ (۳)

(۲) — ۱,۷۵

$F(x) = \sqrt{ax-۱}$

$(-۱,۱)$ $(۲,۲)$

شیب خط مماس $= \frac{۲-۱}{۲-(-۱)} = \frac{۱}{۳}$ ⟵ (۱)

$F'(x) = \frac{a}{۲\sqrt{ax-۱}}$ ⟶ $F'(۱) = \frac{۱}{۳}$ ⟶ $\frac{a}{۲\sqrt{a-۱}} = \frac{۱}{۳}$ ⟶ $a=۱$

$F(۵) = \sqrt{۵-۱} =$ (۲)

(۳)

$y = \frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$

$۴y - ۳x = ۸ \rightarrow ۴y = ۳x+۸ \rightarrow y = \frac{۳}{۴}x + \frac{۸}{۴}$ ⟵ (۳)

شیب خط مماس بر نمودر در نقطه‌ی $(۱,۰)$!

$y' = \frac{۲x+m}{۱} \rightarrow \frac{۳}{۴} = ۲+m \rightarrow m = \frac{۳}{۴} - \frac{۸}{۴} =$ (۴)

$x=۱ \rightarrow \frac{۱-\frac{۵}{۴}+۱}{۳+\frac{۵}{۴}+۱} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱۷}{۴}} =$ (۱)

$(۱, \frac{۳}{۱۷})$ ⟵ باید در معادله خط مماس صدق کند ⟹ $\frac{۳}{۱۷} = \frac{۳}{۴}n + \frac{۸}{۴}$

$m+n = -\frac{۵}{۴} - \frac{۹}{۴} = \frac{-۱۴}{۴} =$ (۵)

۱,۵

$\frac{۳}{۱۷} - \frac{۱۲}{۱۷} = \frac{۸}{۴} \rightarrow \frac{-۹}{۱۷} = \frac{۸}{۴}$

$n = \frac{-۹}{۳۴}$

(۴)

$F(x) = \frac{۲۷ - \sin^۳ x}{۹ - \sin^۲ x}$ $\quad g(x) = \frac{۳}{۳+\sin x}$ $\quad ۳g'(\frac{۵\pi}{۳}) - F'(\frac{۵\pi}{۳})$

$F(x) = \frac{(۳-\sin x)(۹+۳\sin x+\sin^۲ x)}{(۳-\sin x)(۳+\sin x)} = \frac{۹+۳\sin x+\sin^۲ x}{۳+\sin x} \rightarrow F'(x) = \frac{(۲\sin x(\cos x)+۳\cos x)(}{}$

۱,۵

$g'(x) = \frac{-۳(\cos x)}{(۳+\sin x)^۲} \rightarrow g'(\frac{۵\pi}{۳}) = \frac{-\frac{۳}{۲}}{۹+۳\sqrt{۳}+\frac{۳}{۴}}$

(۵)

$F(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ $g(x) = \dfrac{1}{x^5 + |x^5|}$

$g'(\sqrt[5]{3})\, F'(g(\sqrt[5]{3}))$ → $(Fog)'(x)$

$Fog(x) = \dfrac{-1}{\sqrt[5]{\dfrac{1}{2x^5} + \dfrac{1}{2x^5}}} = \dfrac{-1}{\frac{1}{x}} = -x$

$Fog'(x) = -1$

۲

---

(۶)

$F(x) = \left(\dfrac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2$ $f(x) = x(g(x)) + 1$ → $F'(x) = xg'(x) + g(x)$

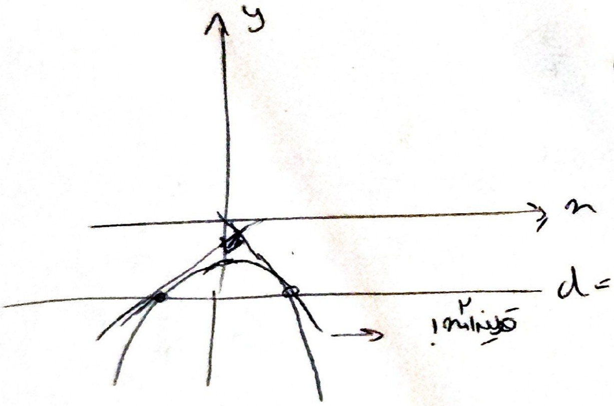
→ $\dfrac{\sin^2 x + 1 - 2\sin x}{\sin^2 x + 1 + 2\sin x} = x\,g(x) + 1$

۱٫۵

$g(x) = \dfrac{\dfrac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{\sin^2 x + 1 + 2\sin x} - 1}{x}$ → صفر صفر می‌شود!

---

(۷)



x^2+1 قرینه → $-x^2-1$

$y' = -2x$

$y' = -2x$

۲

$\dfrac{-1}{+2x} = \dfrac{+2(-x)}{1}$ → $-4x^2 = -1$ → $x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \pm\frac{1}{2}$

$y = -x^2 - 1$ → $x = +\frac{1}{2}$ → $y = -\frac{1}{4} - \frac{4}{4}$ → $-\frac{5}{4}$ → پس فاصله خط d تا محور ایکس‌ها $\frac{5}{4}$ است!

---

(۸)

$F(x) = 2\sqrt{x}\,(4x^2+3)$ → $F(0) = 0$ → در نتیجه نقطه (۰،۰) خط d بر منحنی مماس است

۱

→ $F'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{x}}(4x^2+3) + 2\sqrt{x}\,(8x)$ → $F'(0) = 0$ → شیب صفر

d = صفر

۹۲

$g'(\sqrt{\frac{\omega}{۲}}) = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$ ✓

$F(x) = (x[x])^{۳}$ $g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}} \rightarrow \frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}-۱}} = g'(x)$

۱٫۵ (۱۰)

$(fog)'(\sqrt{\frac{\omega}{۲}}) = ?$

$g'(\sqrt{\frac{\omega}{۲}}) = \frac{۲ \times \sqrt{\omega}}{۲} = \sqrt{۵}$ ✓

$\Rightarrow F'(g(\sqrt{\frac{\omega}{۲}})) * (g'(\sqrt{\frac{\omega}{۲}}))$

$۳(x[x])^{۲}([x]) = F'(x) \hookrightarrow F'(۲^{+}) = ۳(۲(۲))(۲) = ۹۶$ ✓

۳

$x=1 \longrightarrow y=\frac{۲+m}{۴}$

$y'=\frac{(۲n+m)(n+۲)-(n^{۲}+nn+۱)}{(n+۲)^{۲}}=\frac{n^{۲}+۴n+۳}{(n+۲)^{۲}}=\frac{۳m+۹}{۱۶}=\frac{۳}{۴} \rightsquigarrow m=۴$

$y=\frac{۳}{۴}n+\frac{n}{۴} \rightsquigarrow \frac{۳+n}{۴}=\frac{۲+۲}{۴} \rightsquigarrow n=۱$

$m+n=۴$

۲

$m=\frac{۲-۱}{۲+۱}=\frac{۱}{۳} \rightsquigarrow f'(۱)=\frac{a}{۲\sqrt{an-۱}}=\frac{۱}{۳} \rightsquigarrow ۳a=۲\sqrt{an-۱}$

معادله مماس: $y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳} \rightsquigarrow x+۴=۳\sqrt{an-۱} \rightsquigarrow x+۴=\frac{۳a}{۲}(۳)=\frac{۹a}{۲}$

$x=۴,۵a-۴ \rightsquigarrow ۴,۵a-۴+۴=۳\sqrt{a(۴,۵a-۴)-۱} \rightsquigarrow ۹a^{۲}-۱۴a-۴=۰ \Rightarrow a=۲ \checkmark$

$f(a)=\sqrt{۱۰-۱}=\sqrt{۹}=۳$ ↳ $a=-\frac{۲}{۹}$ ✗

۴

$۳g-f(x)=\frac{۹}{۳+\sin x}-\frac{(۳-\sin x)(۹+\sin^{۲}x+۳\sin x)}{(۳-\sin x)(۳+\sin x)}=\frac{-\sin(\sin x+۳)}{\sin x+۳}$

↳ $-\sin x \xrightarrow{\text{مشتق}} (۳g-f)'(x)=-\cos x \rightsquigarrow -\cos(\frac{۵\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}$

۵

$g(x)=\frac{f(x)-۱}{x} \rightarrow \lim_{x\to۰} g(x)=f'(۰)$

$f'(x)=\frac{۲}{(۱+\sin x)^{۲}} \times \cos x \times ۲(\frac{\sin x-۱}{۱+\sin x}) \rightarrow f'(۰)=\frac{۲}{۱} \times ۱ \times -۲=-۴$

۸

$f(x) = 8x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(x) = 20x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ای $a = x$ برابر است با:

$y - 2\sqrt{a}(4a^2+3) = \frac{20a^2+3}{\sqrt{a}}(x-a)$

$x=y=0 \rightsquigarrow -2\sqrt{a}(4a^2+3) = \frac{20a^2+3}{\sqrt{a}}(-a) \rightsquigarrow 2(4a^2+3) = 20a^2+3$

$8a^2+6 = 20a^2+3 \longrightarrow 12a^2 = 3 \longrightarrow a = \pm\frac{1}{2} \rightsquigarrow a>0 \rightsquigarrow a=\frac{1}{2}$

$m = 20(2^{-1}\times\frac{3}{2}) + 3(2^{-1}(\frac{-1}{2})) = 8\sqrt{2}$

۱۰

$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$

$g'(\frac{\sqrt{5}}{2}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{5})(\frac{5}{4}-1)^{-\frac{3}{2}} \longrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{-2(-\frac{3}{2})}{1}\right) = -4\sqrt{5}$

$g(\frac{\sqrt{5}}{2}^-) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}^- - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}^-}} = \frac{1}{\frac{1}{2}^-} = 2^+$

$f'(2^+) = ((2x)^3)' = 24x^2 = 24\times 4$

$fog'(\frac{\sqrt{5}}{2}^-) = -4\sqrt{5}\times 24\times 4 \xrightarrow{\div -48\sqrt{5}} \frac{24\times 4\times 2 - 4\sqrt{5}}{-48\sqrt{5}} = 1$

۹

$y = mx \longrightarrow \frac{\sqrt{a}}{-2a^2+a+1} = ma \longrightarrow \frac{1}{-2a^2+a+1} = m\sqrt{a}$

$m\sqrt{a}(-2a^2+a+1) = 1 \longrightarrow -2m(a^{\frac{5}{2}}) + m(a^{\frac{3}{2}}) + m(a)^{\frac{1}{2}} = 1$ مشتق

$-5m(a^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{2}m(a^{\frac{1}{2}}) + \frac{m}{2}(a^{-\frac{1}{2}}) = 0$

$\frac{m}{2}(a^{-\frac{1}{2}})(-10a^2+3a+1) = 0 \rightsquigarrow a = -\frac{1}{5} \text{ ی } a = \frac{1}{2} \checkmark \quad (a>0)$

$f(a) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$